



UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEP. MATEMÁTICA

# Dinâmica de sistemas dissipativos e não-autónomos com uma coordenada angular

Rogério Ferreira Martins

Doutoramento em Matemática  
(Especialidade Análise Matemática)

2005



UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEP. MATEMÁTICA

# Dinâmica de sistemas dissipativos e não-autónomos com uma coordenada angular

Rogério Ferreira Martins

Doutoramento em Matemática  
(Especialidade Análise Matemática)

Tese orientada pelo Prof. Dr. Rafael Ortega,  
Dep. Matemática Aplicada,  
Universidade de Granada

2005

às minhas mulheres, Sandra, Alice, Laura e Marta.



...quando, ao tentar fazer investigação, dou comigo às vezes a construir esquemas cada vez mais abstractos, sem finalidade, começo a ver o sorriso, entre irónico e afectuoso, de Bento Caraça, e julgo ouvir a sua voz a dizer-me, com lhaneza alentejana: “Amigo, você por esse caminho arrisca-se a ficar perdido em congeminações escolásticas: vai ser como um moinho, que mexe e remexe, sem ter nada dentro para moer.” Acordo então do meu devaneio, e prometo a mim mesmo ser mais razoável daí por diante.

J. Sebastião e Silva, *Bento Caraça e o ensino da Matemática em Portugal*, Diário da República, 25 Junho de 1968.



## Agradecimentos

Esta tese é o resultado do trabalho iniciado em Julho de 2000, desenvolvido em Lisboa mas com frequentes idas a Granada. Tive o privilégio de ter a meu lado o Prof. Dr. Rafael Ortega que, além de partilhar comigo o seu saber e experiência como matemático e professor, se tornou também um grande amigo; teve uma influência determinante na forma como hoje encaro a matemática.

Os temas desta tese foram publicados em [Ma1], [Ma2] e [Ma3]. Embora estes três artigos me tenham a mim como único autor, estão impregnados de ideias que me foram sendo transmitidas pelo Prof. Dr. Rafael Ortega.

Ao longo destes anos tive o prazer de poder participar no NARIO, também conhecido como seminário clandestino, onde foi possível discutir de uma forma informal vários temas entre os quais os desta tese. Gostaria de agradecer especialmente aos Prof. Drs. Alessandro Margheri, Carlota Rebelo, Luís Sanchez e Dr. José Maria Gomes todo o apoio que me deram.

Durante a realização desta tese tive o apoio do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Universidade de Lisboa. A dispensa de serviço docente por três anos que me foi concedida pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa permitiu-me a dedicação a tempo inteiro à investigação. Tive o apoio do Ministério de Educación, Cultura e Deporte Espanhol, da Acção integrada Luso-Espanhola E-15/01 e da Fundação para a Ciência e Tecnologia, programa POCTI (Portugal/FEDER-EU) e SFRH/BD/10628/2002.

Declaro ainda que me sinto um ser afortunado dado o carinho que a minha família e amigos me tem dispensado; em especial a Sandra e as minhas filhas Alice, Laura e Marta.





## Resumo

Estudamos a dinâmica de sistemas não-autónomos periódicos que têm como espaço de fases o cilindro. Sempre que o sistema for dissipativo a aplicação de Poincaré tem um atrator. Procuramos condições para que este atrator seja ou não homeomorfo ao círculo. Motivados pelos resultados obtidos por M. Levi e independentemente por Q. Min, S. Xian e Z. Jinyan estudamos aplicações à equação do pêndulo forçado com atrito. Encontramos relações com a trabalho de R. A. Smith que utilizamos no estudo de sistemas de osciladores acoplados e equações ordinárias de ordem  $n$ .

**Palavras chave:** Atrator, sistema dissipativo, pêndulo, espaço de fases cilíndrico.



## Abstract

We study the dynamics of non-autonomous and periodic systems with a cylindrical phase space. Whenever the system is dissipative the Poincaré map has an attractor. We look for conditions which ensure that this attractor is homeomorphic or not to the circle. Motivated by previous results by M. Levi and independently by Q. Min, S. Xian, and Z. Jinyan we study applications to the forced pendulum equation with friction. We find connections with the work of R. A. Smith and we apply it to the study of coupled pendulum equations and ordinary differential equations of order  $n$ .

**Key words:** Attractor, dissipative system, pendulum, cylindrical phase space.



# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| Agradecimentos  | v         |
| Notação   | xiii      |
| Introdução  | 1         |
| <b>1 Atratores de sistemas periódicos e dissipativos</b>                                      | <b>5</b>  |
| 1.1 A aplicação de Poincaré e o espaço de fases . . . . .                                     | 6         |
| 1.2 A dissipação e o atrator . . . . .  | 8         |
| 1.3 Um exemplo típico de sistema dissipativo . . . . .  | 17        |
| 1.4 Condições gerais para a existência de um atrator homeomorfo<br>a $\mathbb{T}^1$ . . . . . | 22        |
| <b>2 A equação do tipo do pêndulo com atrito</b>  | <b>25</b> |
| 2.1 Existência de um atrator unidimensional . . . . .   | 26        |
| 2.2 Condições para que $\mathcal{A}$ não seja homeomorfo a $\mathbb{T}^1$ . . . . .           | 30        |
| 2.3 Uma classe de equações tal que $\mathcal{A}$ não é homeomorfo a $\mathbb{T}^1$ . . . . .  | 43        |
| 2.4 Um contra-exemplo autónomo . . . . .  | 58        |
| <b>3 Conexões com os trabalhos de R. A. Smith</b>   | <b>65</b> |
| 3.1 A condição de R. A. Smith . . . . .   | 65        |
| <b>4 Sistemas de osciladores acoplados</b>  | <b>73</b> |
| 4.1 Um sistema de osciladores simetricamente acoplados . . . . .                              | 73        |
| 4.2 Um sistema de $n$ pêndulos acoplados . . . . .  | 74        |
| 4.3 Uma equação ordinária de ordem $n$ . . . . .  | 80        |
| <b>Apêndice</b>   | <b>87</b> |
| <b>Conclusão e trabalho futuro</b>  | <b>91</b> |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>93</b> |



## Notação

Esta é uma lista das notações de uso corrente usadas ao longo desta tese. As notações menos comuns na literatura serão introduzidas ao longo do texto. Desta forma, em principio não será estritamente necessário ler esta secção para entender o texto.

Denotamos por  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  ( $M_{n \times m}(\mathbb{C})$ ), o espaço vectorial das matrizes com  $n$  linhas e  $m$  colunas com entradas em  $\mathbb{R}$  (em  $\mathbb{C}$ ). Dado um elemento  $M \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$  denotamos por  $M^*$  a matriz transconjugada de  $M$ . A matriz diagonal será denotada por  $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  e  $\text{tr}M$  será a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz. A matriz identidade em  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  será denotada por  $I_n$ . Consideramos em particular o espaço  $\mathbb{R}^n = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$  das matrizes coluna. Neste espaço, dados dois elementos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , consideramos o produto interno  $x^*y$  e a norma Euclideana  $\|x\|$ . Dados  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$  designamos por  $\text{span}\{x_1, \dots, x_p\}$  o subespaço gerado por estes elementos. Denotamos por  $\sigma(M)$  o conjunto dos valores próprios de  $M$  e por  $|M|$  a norma espectral de  $M$  i.e.

$$|M| = \inf_{\|u\| \leq 1} \|Mu\| = (\max \sigma(M^*M))^{1/2}.$$

Dados dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $X$ , denotamos por  $A \setminus B$  conjunto dos elementos que pertencem a  $A$  e não pertencem a  $B$ . Se todos os elementos de  $A$  estão em  $B$  (ou mesmo se  $A = B$ ) escrevemos  $A \subset B$ , finalmente, se  $A$  e  $B$  são disjuntos, denotamos por  $A \dot{\cup} B$  a união disjunta. Se  $X$  for um espaço vectorial e  $R \in X$  escrevemos  $A + R = \{x + R : x \in A\}$ . Se  $X$  for um espaço métrico com uma distância  $d$  definimos

$$d(x, A) = \inf_{u \in A} d(x, u).$$

Se  $X$  for um espaço topológico, denotamos por  $\overline{A}$  o fecho,  $\text{int}A$  o interior e  $\partial A$  a fronteira de  $A$ .

Consideramos os espaços  $C^i(\mathbb{R}/k\mathbb{Z})$  das funções reais de variável real, de classe  $C^i$  e  $k$ -periódicas.

Dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  denotamos por  $f'(x)$  o Jacobiano de  $f$  em  $x$ . Se  $f$  for linear denotamos por  $\text{Ker } f$  e  $\text{Rank } f$  o núcleo e a imagem de  $f$ , respectivamente.

Dada uma função  $f : X \rightarrow X$  escrevemos

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x)$$

e

$$f^{-n}(x) = \underbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})}_{n \text{ vezes}}(x)$$

sempre que estes estejam definidos. Diremos que um conjunto  $B \subset X$  é positivamente invariante para  $f$  se  $f(B) \subset B$  e invariante se  $f(B) = B$ .

Denotamos por  $\deg$  o valor do grau de Brouwer, teoria esta que assumimos conhecida. Finalmente usamos a abreviatura c.q.d de “como queríamos demonstrar” para indicar o fim de uma demonstração e a abreviatura q.t.p. para “quase todo o ponto”.



# Introdução

Dado  $c > 2$ , a aplicação de Poincaré associada à equação do pêndulo periodicamente forçado com atrito

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -cv - \sin x + p(t) \end{cases}, \quad (x, v) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad (1)$$

têm um atrator homeomorfo ao círculo. Este resultado foi provado por M. Levi [Le] e independentemente por Q. Min, S. Xian, Z. Jinyan [MiXiJi] e formou a base inicial do nosso trabalho. Pretendíamos, por um lado estudar se a estimativa obtida para  $c$  era óptima e por outro lado encontrar condições gerais que garantissem que um sistema dissipativo no cilindro tenha um atrator homeomorfo ao círculo.

Dado um sistema não-autónomo da forma

$$x' = F(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

onde  $F$  é  $T$ -periódica em  $t$  e  $R$ -periódica em  $x$ , podemos ver o espaço de fases como o espaço cociente  $\mathbb{R}^n/R\mathbb{Z}$ , que é um cilindro com  $n$  dimensões. Diremos que um sistema deste tipo é dissipativo quando existir um subconjunto do cilindro que intercepte todas as órbitas dadas por iteradas da aplicação de Poincaré  $\overline{P}$ ; a um tal conjunto chamaremos uma janela. Como estamos a trabalhar em dimensão finita (em particular num espaço localmente compacto) vamos ver que isto é equivalente à existência de uma janela  $B$  positivamente invariante pela aplicação de Poincaré. Chamamos atrator ao o conjunto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{P}^n(B),$$

que é o maior conjunto invariante para a aplicação de Poincaré.

Observámos que quando a dissipação é forte temos tipicamente um atrator homeomorfo ao círculo. Neste caso, a aplicação de Poincaré restrita ao atrator é conjugada com um homeomorfismo do círculo, pelo que podemos definir um número de rotação. A teoria dos homeomorfismos do círculo permite-nos obter bastante informação sobre a dinâmica dentro do atrator.

Reformulámos os trabalhos [Le] e [MiXiJi] e mostrámos que dadas  $h(x)$  e  $g(t, x)$  1-periódicas em  $x$ , com  $\min h = c > 0$  e  $H(x) = \int_0^x h(s)ds$ , a equação

$$\begin{cases} x' = v - H(x) \\ v' = -g(t, x) \end{cases}, \quad (x, v, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z},$$

é tal que sempre que o conjunto

$$\left\{ \frac{g(t, x) - g(t, y)}{x - y} \in \mathbb{R} : (t, x, y) \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}$$

é limitado e tem  $c^2/4$  como majorante, o atractor associado é homeomorfo ao círculo. O nosso resultado tem a vantagem de tratar o caso não diferenciável. Por outro lado, mostrámos que a existência de soluções sub-harmónicas inversamente instáveis (ver [Lev]) implica que o atractor não seja homeomorfo ao círculo. Este é um resultado que depende do facto de estarmos a trabalhar em duas dimensões. Usámos este resultado para construir um contra-exemplo que mostra que o limite  $c^2/4$  é óptimo. Mais tarde chegámos à conclusão que este mesmo facto podia ser observado a partir de uma classe de equações autónomas do tipo das estudadas por F. Tricomi nos anos 30.

Os resultados obtidos para dimensão 2 não são facilmente generalizáveis a dimensões maiores; uns simplesmente porque a geometria se torna mais complicada outros porque dependem intrinsecamente da dimensão. Contudo, mostrámos que existem relações com uma condição introduzida por R. A. Smith que consiste em encontrar uma forma quadrática de índice 1 em  $\mathbb{R}^n$  e um número  $\lambda > 0$  de tal forma que  $e^{2\lambda t}V(x_1(t) - x_2(t))$  seja decrescente para cada par de soluções  $x_1$  e  $x_2$  de (2). Mostrámos que sempre que esta condição é verificada o atractor é homeomorfo ao círculo. Dada agora uma equação do tipo

$$y' = Cy + J(t, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n/R\mathbb{Z}, \quad (3)$$

onde  $C$  é uma matriz com um valor próprio nulo e todos os restantes com parte real negativa, foi provado por R. A. Smith que a condição acima é satisfeita sempre que a constante de Lipschitz de  $J$  na segunda variável for inferior a  $\mu(\lambda)^{-1}$ , definido por

$$\mu(\lambda)^{-2} = \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \min \sigma\{(C + \lambda I - i\omega I)(C^* + \lambda I + i\omega I)\}.$$

Embora tenhamos chegado a uma condição aparentemente simples para que o atractor seja homeomorfo ao círculo, na prática a quantidade  $\mu(\lambda)$  não é fácil de calcular. Podemos todavia fazer uma mudança de variável conveniente de

forma a facilitar o cálculo desta quantidade. Gostaríamos agora de aplicar estes resultados a algumas classes particulares de equações, por exemplo à equação de  $n$  pêndulos acoplados

$$u'' + \gamma u' + Au + S(t, u) = 0, \quad (t, u) \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n/\eta\mathbb{Z}, \quad \gamma > 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $A$  é uma matriz simétrica com um valor próprio nulo e todos os restantes  $\alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  positivos (supomos que estão escritos de acordo com a sua multiplicidade). O caso autónomo foi estudado por M. Qian, W. Qin e S. Zhu [QiQiZh] e tínhamos esperanças que com este novo método o pudéssemos generalizar. Podemos escrever o sistema na forma de (3)

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -A & -\gamma I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S(t, u) \end{pmatrix}$$

e depois de uma mudança de coordenadas conveniente chegamos à conclusão que o atrator associado é homeomorfo ao círculo sempre que a constante de Lipschitz de  $S$  na segunda variável verificar

$$K < \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_2}}{8} \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\alpha_i|}.$$

Obtivemos desta forma um resultado independente do obtido em [QiQiZh]. Finalmente estudámos a equação

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2x'' + a_1x' = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z},$$

onde  $g$  é uma função periódica em  $x$  e  $a_1, \dots, a_{n-1}$  são constantes reais. Esta equação pode ser escrita como (3) da forma habitual e também aqui obtemos uma estimativa para os valores  $a_i$ 's para os quais o atrator associado é homeomorfo ao círculo.



# Capítulo 1

## Atratores de sistemas periódicos e dissipativos

Consideremos um sistema de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^n$

$$x' = F(t, x) \quad (1.1)$$

onde  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua e verifica as seguintes condições de periodicidade:

$$\begin{aligned} F(t + T, x) &= F(t, x), \\ F(t, x + R) &= F(t, x), \end{aligned}$$

para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ;  $T \in \mathbb{R}$  é uma constante positiva e  $R$  é um vector não nulo de  $\mathbb{R}^n$ . Vamos supor, ao longo de toda a tese, que para cada  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , o problema de condições iniciais

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

tem uma e uma só solução  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ , definida num intervalo maximal  $]w_-(t_0, x_0), +\infty[ \subset \mathbb{R}$ , i.e. assumimos que as soluções estão bem definidas para todo o  $t \geq t_0$ . Pretendemos neste capítulo formalizar uma base de trabalho que nos permita estudar a dinâmica de sistemas do tipo de (1.2). Na secção seguinte vamos definir a aplicação de Poincaré associada a (1.1) e de seguida introduzimos o espaço quociente  $\mathbb{R}^n/R\mathbb{Z}$ , que será o espaço de fases natural para a equação (1.1). A Secção 1.2 será dedicada ao conceito de dissipação. Veremos também como a existência de um conjunto positivamente invariante para a aplicação de Poincaré implica a existência de um atrator para as sucessões dadas por iteradas desta aplicação. Estudaremos finalmente algumas propriedades destes atratores. Na Secção 1.3 estudaremos

condições para que certos sistemas (perturbações de sistemas lineares) sejam dissipadores; muitos dos modelos estudados ao longo desta tese serão deste tipo. Finalmente, na última secção apresentaremos condições gerais para que estes atractores sejam homeomorfos ao círculo.

## 1.1 A aplicação de Poincaré e o espaço de fases

Definimos a aplicação de Poincaré em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ P(x_0) &= x(T; 0, x_0). \end{aligned}$$

Como assumimos que temos existência e unicidade para o problema de condições iniciais (1.2),  $P$  é uma função bem definida e bijectiva entre  $\mathbb{R}^n$  e  $P(\mathbb{R}^n)$ . Podemos ainda concluir que temos dependência contínua nas condições iniciais (ver [Har], pág.94), logo  $P$  é contínua com inversa contínua i.e.  $P$  é um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^n$  e  $P(\mathbb{R}^n)$ . Podemos também deduzir que  $P(\mathbb{R}^n)$  é um aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

Definimos uma relação de equivalência em  $\mathbb{R}^n$

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in R\mathbb{Z};$$

cujo conjunto de classes de equivalência designamos por  $\mathcal{C}$ . Representaremos por  $\overline{x}$ , ou simplesmente por  $x$ , a classe de equivalência de  $x \in \mathbb{R}^n$ . Esta relação de equivalência identifica cada hiperplano  $r$  perpendicular a  $R$  com o hiperplano paralelo  $r + R$ . A soma de elementos de  $\mathcal{C}$ , dada da forma obvia

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y},$$

torna  $\mathcal{C}$  um grupo. Consideremos a função

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(\overline{x}, \overline{y}) &= \inf_{u \in \overline{x - y}} \|u\|, \end{aligned}$$

e os conjuntos (ver Figura 1.1)

$$S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : (i - 1/2)\|R\|^2 \leq x^* R < (i + 1/2)\|R\|^2\}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

que formam uma partição disjunta de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada par  $\overline{x}, \overline{y} \in \mathcal{C}$

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{x - y}, 0) = \|u_0\|$$

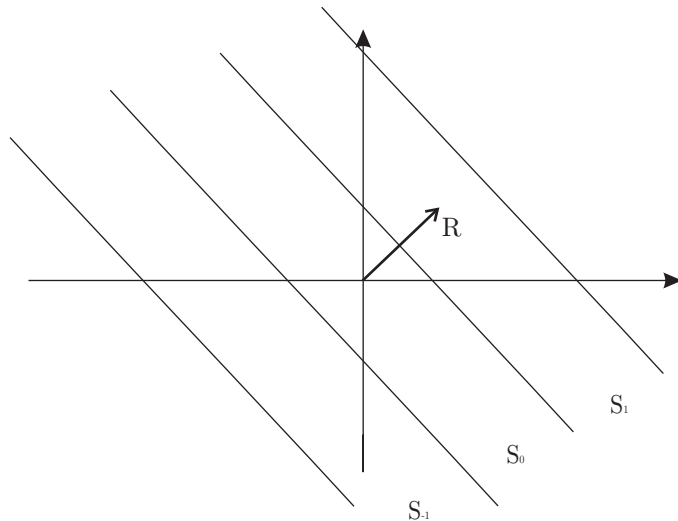


Figura 1.1:

onde  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  é o único elemento em  $\overline{x - y} \cap S_0$ . Não é difícil verificar que  $d$  é uma distância em  $\mathcal{C}$ . Deste modo  $\mathcal{C}$  é um espaço métrico. Consideremos a projecção canónica

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{C} \\ x &\rightarrow \overline{x}. \end{aligned}$$

Vamos ver que esta função define a topologia em  $\mathcal{C}$ .

**Proposição 1.1.1.** *Um conjunto  $U \subset \mathcal{C}$  é aberto em  $\mathcal{C}$  sse  $e^{-1}(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Dem.** A projecção canónica é contínua. De facto, se  $x_n \rightarrow x$  em  $\mathbb{R}^n$  então para  $n$  grande  $d(\overline{x_n}, \overline{x}) = \|x_n - x\|$ , logo  $e(x_n) \rightarrow e(x)$ . Concluimos que se  $U$  é aberto em  $\mathcal{C}$  então  $e^{-1}(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $U \subset \mathcal{C}$  é tal que  $e^{-1}(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e se  $(\overline{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão a convergir para  $\overline{x} \in U$ , então  $d(\overline{x_n}, \overline{x}) = \|u_n\|$ , onde  $u_n \in \overline{x_n - x} \cap S_0$ . Se  $u_n = x_n - x + i_n R$  então  $(x_n + i_n R)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x \in \text{int}(e^{-1}(U))$  e logo  $x_n + i_n R \in e^{-1}(U)$ , ou seja  $e(x_n + i_n R) = \overline{x_n} \in U$ , para  $n$  grande. Concluimos que  $U$  é aberto em  $\mathcal{C}$ . c.q.d.

A última proposição mostra que a topologia criada por  $d$  em  $\mathcal{C}$  é a maior topologia para a qual a projecção canónica é contínua. Não é difícil de ver

que o espaço  $\mathcal{C}$  é um grupo topológico com esta topologia. Quando  $n = 2$   $\mathcal{C}$  é homeomorfo ao cilindro topológico.

Se  $x$  for solução de (1.1) então, dada a periodicidade de  $F$  na segunda variável,  $x + R$  também é solução. Concluimos que

$$x(t; 0, x + R) = x(t; 0, x) + R$$

e em particular

$$P(x + R) = P(x) + R.$$

Fica então bem definida a aplicação de Poincaré em  $\mathcal{C}$  por

$$\overline{P} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\overline{x} \rightarrow \overline{P(x)} = e(P(x)) = \overline{x}(T; 0, x).$$

**Proposição 1.1.2.** *A função  $\overline{P} : \mathcal{C} \rightarrow \overline{P}(\mathcal{C})$  é um homeomorfismo.*

**Dem.** Vamos começar por ver que  $\overline{P}$  é injectiva. Dados  $\overline{x}_0 \neq \overline{x}_1$  em  $\mathcal{C}$ , se por absurdo  $\overline{x}(T; 0, x_0) = \overline{x}(T; 0, x_1)$  então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x(T; 0, x_0) = x(T; 0, x_1) + kR = x(T; 0, x_1 + kR)$ . Por unicidade concluimos que  $x_0 = x_1 + kR$ , o que é um absurdo.

Para provar a continuidade vamos usar a última proposição e o facto de  $P$  ser um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^n$  e o aberto  $P(\mathbb{R}^n)$ . Em primeiro lugar observamos que  $e^{-1}(\overline{P}(\mathcal{C})) = P(e^{-1}(\mathcal{C})) = P(\mathbb{R}^n)$  é aberto, logo  $\overline{P}(\mathcal{C})$  é aberto em  $\mathcal{C}$ . Se  $U \subset \overline{P}(\mathcal{C})$  é aberto, então  $U$  é aberto em  $\mathcal{C}$  e logo  $e^{-1}(U)$  é aberto. Mais,  $e^{-1}(\overline{P}^{-1}(U)) = P^{-1}(e^{-1}(U))$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ , pelo que  $\overline{P}^{-1}(U)$  é aberto em  $\mathcal{C}$ . Concluimos que  $\overline{P}$  é contínua. Por outro lado, se  $U \subset \mathcal{C}$  é aberto então  $e^{-1}(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e  $e^{-1}(\overline{P}(U)) = P(e^{-1}(U))$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ . Logo  $\overline{P}(U)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$  e também em  $\overline{P}(\mathcal{C})$ . Concluimos que  $\overline{P}^{-1}$  é contínua. c.q.d.

## 1.2 A dissipação e o atractor

Com vista ao estudo de  $\overline{P}$  vamos começar por ver algumas propriedades gerais de homeomorfismos em espaços métricos localmente compactos.

**Definição 1.2.1.** *Seja  $f : X \rightarrow f(X) \subset X$  um homeomorfismo num espaço métrico localmente compacto  $X$ . Um subconjunto compacto  $W \subset X$  é uma janela de  $f$  se para todo o  $x \in X$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(x) \in W$ . Diremos que  $f$  é dissipativo se tiver uma janela.*



Se  $X$  for um espaço topológico compacto então a última definição é trivialmente verificada. Desta forma a última definição só faz sentido em espaços topológicos que não são compactos.

A próxima proposição foi provada em [RiWil] embora a demonstração que apresentamos da segunda implicação seja da autoria do Prof. Dr. Rafael Ortega.

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $X$  um espaço métrico localmente compacto e  $f : X \rightarrow f(X) \subset X$  um homeomorfismo. As seguintes proposições são equivalentes:*

- (i)  $f$  é dissipativo;
- (ii) dado qualquer compacto  $S \subset X$ , existe uma janela  $W$  tal que  $S \subset \text{int}W$ ,  $f(W) \subset W$  e para todo  $x \in X$  existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_x}(x) \in \text{int}W$ ;
- (iii) dado qualquer compacto  $S \subset X$ , existe uma janela  $W$  tal que  $S \subset \text{int}W$  e  $f(W) \subset \text{int}W$ .

**Dem.** Vamos começar por demonstrar que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Seja  $W$  uma janela de  $f$ . Dado que  $X$  é localmente compacto, podemos considerar um compacto  $\widehat{W}$  de tal forma que  $S \cup W \subset \text{int}\widehat{W}$ . Em particular  $\widehat{W}$  é uma janela para  $f$ . Para cada  $x \in X$  existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $f^{n_x}(x) \in W \subset \text{int}\widehat{W}$ . Por continuidade, para cada  $x \in X$  existe  $U_x$ , vizinhança de  $x$ , tal que  $f^{n_x}(U_x) \subset \text{int}\widehat{W}$ . Seja  $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$  uma subcobertura finita de  $\widehat{W}$  e  $r = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$ . Consideramos o compacto  $W_1 = \cup_{k=0}^r f^k(\widehat{W})$ , que verifica  $f(W_1) = \cup_{k=1}^r f^k(\widehat{W}) \cup f^{r+1}(\widehat{W}) \subset W_1 \cup f^{r+1}(\widehat{W})$ . Se mostrarmos que  $f^{r+1}(\widehat{W}) \subset W_1$ , então  $W_1$  é a janela procurada. De facto, dado  $x \in f^{r+1}(\widehat{W})$  existe  $y \in \widehat{W}$  tal que  $x = f^{r+1}(y)$ . Por outro lado,  $y \in U_{x_i}$  para algum  $1 \leq i \leq m$  pelo que  $x = f^{r+1-n_{x_i}} f^{n_{x_i}}(y) \in f^{r+1-n_{x_i}}(\widehat{W}) \subset W_1$ .

Vamos ver agora que (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Seja  $W$  uma janela nas condições de (ii). Tal como na parte anterior, vamos considerar uma janela  $\widehat{W}$  de tal forma que  $S \cup W \subset \text{int}\widehat{W}$ . Definimos a função

$$V(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i d(f^i(x), \widehat{W}).$$

Dado  $x \in X$ , por (ii), existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \subset W \subset \widehat{W}$  qualquer que seja  $n > n_x$ . Desta forma,  $V$  está definida em  $U$  pela soma finita de funções contínuas. Concluimos que  $V$  é uma função contínua. Temos

$$V(f(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i d(f^{i+1}(x), \widehat{W}) \leq \frac{1}{2} V(x),$$

pelo que, se definirmos

$$W_\epsilon = \{x \in X : V(x) \leq \epsilon\},$$

temos  $f(W_\epsilon) \subset \text{int} W_\epsilon$ . Como  $V(x) = 0$  sse  $x \in \widehat{W}$  temos  $S \subset \text{int} \widehat{W} \subset W_\epsilon$ . Se para algum  $\epsilon_0$ ,  $W_{\epsilon_0}$  for compacto então o resultado fica provado. Consideremos outro compacto  $\widetilde{W}$  tal que  $\widehat{W} \subset \text{int} \widetilde{W}$ . Se

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2} \inf_{x \in X \setminus \widetilde{W}} d(x, \widehat{W}) > 0$$

temos  $W_{\epsilon_0} \subset \widetilde{W}$ , pelo que  $W_{\epsilon_0}$  é compacto.

c.q.d.

Gostaríamos de enfatizar que a equivalência dada na última proposição só é possível devido ao facto de  $X$  ser localmente compacto. Em [Ha] podemos ver o que se passa quando  $X$  não é localmente compacto.

**Exemplo 1.2.3.** Consideremos a equação não-autónoma em  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \theta' = 1 \\ v' = -v + \sin t \end{cases} ,$$

Tomando  $R = (1, 0)^*$  e  $T = 2\pi$  obtemos um problema do tipo de (1.1). Este sistema tem soluções

$$x(t; t_0, \theta_0, v_0) = \left( (t - t_0) + \theta_0, e^{-(t-t_0)} \left( v_0 - \frac{\sin t_0 - \cos t_0}{2} \right) + \frac{\sin t - \cos t}{2} \right)^* , \quad (1.3)$$

pelo que a aplicação de Poincaré está definida em todo o plano por

$$P(\theta_0, v_0) = \left( 2\pi + \theta_0, e^{-2\pi} \left( v_0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right)^* .$$

Observemos que se  $P = (P_1, P_2)^*$ ,

$$\left| P_2(\theta_0, v_0) - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| = e^{-2\pi} \left| v_0 - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| ,$$

logo, dado  $c_1 > 0$ , o conjunto

$$\overline{B} = \left\{ \overline{(\theta, v)} \in \mathcal{C} : \left| v - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| < c_1 \right\}$$

é uma janela para  $\overline{P}$ . Concluimos que  $\overline{P}$  é dissipativa.

Consideremos agora um sistema do tipo de (1.1) e a sua aplicação de Poincaré  $\bar{P}$  no cilindro. Se  $\bar{P}$  for dissipativa, pela proposição anterior podemos tomar uma janela  $\bar{B}$  tal que  $\bar{P}(\bar{B}) \subset \text{int}\bar{B}$ , obtemos então

$$\dots \bar{P}^n(\bar{B}) \subset \bar{P}^{n-1}(\bar{B}) \subset \dots \subset \bar{P}^2(\bar{B}) \subset \bar{P}(\bar{B}) \subset \bar{B}. \quad (1.4)$$

Consideremos a intersecção de todos estes compactos

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{P}^n(\bar{B}).$$

Este tipo de construção é clássico, veja-se [Lev] ou [Pl]. A próxima proposição descreve algumas das propriedades de  $\mathcal{A}$ .

**Proposição 1.2.4.** *O conjunto  $\mathcal{A}$  é não vazio, compacto, invariante para a aplicação de Poincaré e não depende de  $\bar{B}$ .*

**Dem.** Consideremos uma sucessão tal que  $\bar{x}_n \in \bar{P}^n(\bar{B})$ . Dado que esta sucessão está dentro de um compacto, podemos extrair uma subsucessão convergente para  $\bar{x}$ . Obviamente que  $\bar{x} \in \bar{P}^n(\bar{B})$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , logo  $\bar{x} \in \mathcal{A} \neq \emptyset$ .

O conjunto  $\mathcal{A}$  é fechado e está contido dentro do compacto  $\bar{B}$  pelo que também é compacto.

Dado que

$$\bar{P}(\mathcal{A}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{n+1}(\bar{B}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{P}^n(\bar{B}) = \mathcal{A},$$

o conjunto  $\mathcal{A}$  é invariante para a aplicação de Poincaré.

Vamos agora demonstrar a última parte da proposição. Seja  $\bar{B}'$  uma outra janela de  $\bar{P}$  tal que  $\bar{P}(\bar{B}') \subset \text{int}\bar{B}'$ . Para cada  $x \in \bar{B}$  existe  $n_x \in \mathbb{N}$  tal que  $\bar{P}^{n_x}(x) \subset \text{int}\bar{B}'$  e dado que  $\bar{P}$  é contínua existe uma vizinhança de  $x$ ,  $U_x$  tal que  $\bar{P}^{n_x}(U_x) \subset \bar{B}'$ . Como  $\bar{B}$  é compacto existe um número finito destas vizinhanças que o cobre, digamos  $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ . Se  $n_0 = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_k}\}$  então  $\bar{P}^n(\bar{B}) \subset \text{int}\bar{B}'$ , para todo o  $n \geq n_0$ . Concluimos então que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bar{P}^n(\bar{B}')$ . De forma análoga se prova que  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ . c.q.d.

Ao conjunto  $\mathcal{A}$  chamamos um atrator para a aplicação de Poincaré em  $\mathcal{C}$ . A próxima proposição justifica esta designação.

**Proposição 1.2.5.** *Para cada  $\bar{x} \in \mathcal{C}$*

$$d(\bar{P}^n(\bar{x}), \mathcal{A}) \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$  e a convergência é uniforme em cada conjunto compacto  $S \subset \mathcal{C}$ .

**Dem.** Vamos ver que

$$\sup_{x \in \overline{P^n}(\overline{B})} d(x, \mathcal{A}) \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Caso contrário, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\overline{x}_n \in \overline{B}$  tal que  $d(\overline{P}^{k_n}(\overline{x}_n), \mathcal{A}) > \epsilon > 0$  para alguma sucessão  $k_n \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon > 0$ . Como  $\overline{P}^{k_n}(\overline{x}_n) \in \overline{B}$ , podemos extrair uma subsucessão convergente para  $\overline{x} \in \overline{B}$ . Finalmente, tendo em conta o encaixe dos compactos  $\overline{P}^{k_n}(\overline{B})$ , concluímos que  $\overline{x} \in \overline{P}^{k_n}(\overline{B})$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e logo  $\overline{x} \in \mathcal{A}$ ; o que é um absurdo. Dado um conjunto compacto  $S$ , pela Proposição 1.2.2 podemos supor que  $S \subset \overline{B}$ , pelo que

$$\sup_{x \in \overline{P^n}(S)} d(x, \mathcal{A}) \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

c.q.d.

A relação de equivalência em  $\mathbb{R}$ ,

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y + k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

define uma partição em  $\mathbb{R}$ . Denotamos como habitualmente  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  o conjunto dos elementos desta partição. Denotamos por  $\overline{x}$  os elementos de  $\mathbb{T}^1$ , onde  $x$  é um dos elementos de  $\overline{x}$ . Este conjunto possui naturalmente uma estrutura de grupo. Dada a projecção canónica

$$\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$$

$$x \rightarrow \overline{x},$$

consideramos a maior topologia em  $\mathbb{T}^1$  para a qual  $\tau$  é contínua. Deste modo obtemos uma estrutura de grupo topológico para  $\mathbb{T}^1$ .

Consideremos um subespaço vectorial  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n-1$ , tal que  $R \notin \mathcal{F}$ . Se  $Q$  for a projecção sobre  $\mathcal{F}$  tal que  $\text{Ker} Q = \text{span}\{R\}$ , definimos uma função de  $\mathcal{C}$  sobre  $\mathbb{T}^1$  da seguinte forma:

$$\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}^1$$

$$\pi(\overline{x}) = \frac{1}{\|R\|^2} [(I - Q)(x)]^* R.$$

**Proposição 1.2.6.** *A função  $\pi$  é contínua.*

**Dem.** Dado um aberto  $A \subset \mathbb{T}^1$ , pela Proposição 1.1.1,  $\pi^{-1}(A)$  é aberto sse  $e^{-1}(\pi^{-1}(A))$  é aberto. Dado que

$$e^{-1}(\pi^{-1}(A)) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\|R\|^2}(I - Q)x \in \tau^{-1}(A) \right\}$$

e  $\tau^{-1}(A)$  é aberto, concluímos que  $\pi^{-1}(A)$  é aberto em  $C$ . c.q.d.

Foi provado em [RiWi2] que a inclusão  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  induz um isomorfismo na cohomologia de Čech  $i^* : \check{H}^*(\mathcal{C}) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{A})$ , desta forma poderíamos concluir que  $\mathcal{A}$  não é contráctil em  $\mathcal{C}$ , pelo que  $\pi_{/\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$  é sobrejectiva. Contudo vamos demonstrar este facto por uma via mais elementar.

Dado um espaço topológico  $X$ , chamamos curva fechada em  $X$  a uma aplicação contínua  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  cuja restrição a  $[0, 1[$  é injectiva e tal que  $\alpha(0) = \alpha(1)$ . Frequentemente vamos identificar  $\alpha$  com a sua imagem  $\{\alpha(t) : t \in [0, 1]\}$ . Diremos que duas curvas fechadas  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são homotópicas em  $X$  se existir uma aplicação contínua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $H(0, \cdot) = \alpha_1$ ,  $H(1, \cdot) = \alpha_2$  e  $H(\cdot, 0) = H(\cdot, 1)$ . À função  $H$  chamamos uma homotopia de  $\alpha_1$  para  $\alpha_2$ .

**Lema 1.2.7.** *Se  $L$  é uma curva fechada em  $\mathcal{C}$  tal que  $\pi(L) \neq \mathbb{T}^1$  então  $L$  é homotópica em  $\mathcal{C}$  a um ponto.*

**Dem.** Dado que  $\pi(L) \neq \mathbb{T}^1$ , existe  $\bar{a} \in \mathbb{T}^1$  tal que

$$\overline{\frac{1}{\|R\|^2}[(I - Q)L(t)]^*R} \neq \bar{a},$$

para todo o  $t \in [0, 1]$ . Deste modo,  $L$  está contida em

$$\mathcal{C} \setminus \left\{ \bar{x} \in \mathcal{C} : \overline{\frac{1}{\|R\|^2}[(I - Q)x]^*R} = \bar{a} \right\}$$

que é homeomorfo a

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : a < \frac{1}{\|R\|^2}[(I - Q)x]^*R < a + 1 \right\}$$

que ainda é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos um homeomorfismo

$$\Phi : \mathcal{C} \setminus \{ \bar{x} \in \mathcal{C} : \overline{[(I - Q)x]^*R} = \bar{a} \} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} H &: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C} \\ (\lambda, t) &\rightarrow \Phi^{-1}(\lambda \Phi(L(t))) \end{aligned}$$

é uma homotopia de  $L$  para o ponto  $\Phi^{-1}(0)$ .

c.q.d.

**Lema 1.2.8.** *Sejam  $X, Y$  dois espaços métricos e  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de compactos não vazios e encaixados de  $X$ , ou seja  $X_{n+1} \subset X_n \subset X$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Suponhamos que  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua tal que  $f(X_n) = Y$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Então*

$$f \left( \bigcap_n X_n \right) = Y.$$

**Dem.** É óbvio que  $f(\cap_n X_n) \subset Y$ . Por outro lado para cada  $y \in Y$  existe uma sucessão  $x_n \in X_n$  tal que  $f(x_n) = y$ . Como  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  está contida no compacto  $X_1$ , podemos extrair uma subsucessão (que ainda notamos por  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ) convergente para  $x \in X_1$ . Dado que os conjuntos  $X_n$  estão encaixados, concluímos que  $x \in X_n$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e logo  $x \in \cap_n X_n$ . Finalmente, por continuidade,  $f(x_n)$  tende para  $f(x) = y$  logo  $y \in f(\cap_n X_n)$ . c.q.d.

**Proposição 1.2.9.** *Suponhamos que a aplicação de Poincaré associada à equação (1.1) é dissipativa, então  $\pi(\mathcal{A}) = \mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** Consideremos a curva fechada

$$L : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$L(t) = \overline{tR}.$$

Usando o Lema 1.2.2 consideremos uma janela  $\overline{B}$  de  $\overline{P}$  tal que  $\overline{P}(\overline{B}) \subset \text{int} \overline{B}$  e  $L \subset \overline{B}$ . Temos que  $\mathcal{A} = \cap_n \overline{P}^n(\overline{B})$  e pelo último lema só temos de demonstrar que

$$\pi(\overline{P}^n(\overline{B})) = \mathbb{T}^1,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\overline{P}^n(L) \subset \overline{P}^n(\overline{B})$ , basta demonstrar que  $\pi(\overline{P}^n(L)) = \mathbb{T}^1$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . O que é obviamente válido para  $n = 0$ . Consideremos a homotopia

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(\lambda, t) \rightarrow \overline{x(\lambda n; 0, tR)}.$$

Temos que  $H(0, t) = L(t)$ ,  $H(1, t) = \overline{P}^n(L(t))$  e  $H(\cdot, 0) = H(\cdot, 1)$ . Concluimos que  $\overline{P}^n(L)$  é homotópica a  $L$ . Dado que  $L$  não é obviamente homotópica a um ponto, concluimos pelo Lema 1.2.7 que  $\pi(\overline{P}^n(L)) = \mathbb{T}^1$ . c.q.d.

Na última parte desta secção vamos ver que sempre que  $\overline{P}$  contrai áreas  $\mathcal{A}$  tem medida nula. Partindo da medida de Lebesgue  $m(\cdot)$  em  $\mathbb{R}^n$  podemos definir uma medida no cilindro  $\mathcal{C}$ . Se  $A \subset \mathcal{C}$  é tal que a intersecção da imagem inversa de  $A$  pela projecção canónica com  $S_0$ ,  $e^{-1}(A) \cap S_0$ , é mensurável, definimos

$$m_{\mathcal{C}}(A) = m(e^{-1}(A) \cap S_0).$$

Necessitamos de alguns lemas auxiliares.

**Lema 1.2.10.** *Para cada  $x \in P(\mathbb{R}^n)$  existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $x + iR \in P(S_0)$ .*

**Dem.** Relembremos que, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $P(x + iR) = P(x) + iR$ . Seja  $x \in P(\mathbb{R}^n)$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x = P(y)$ . Assim, se  $i \in \mathbb{N}$  for tal que  $y + iR \in S_0$  temos  $P(y + iR) = P(y) + iR = x + iR$ . c.q.d.

**Lema 1.2.11.** *Temos*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [(P(S_0) \cap S_i) - iR] = P(\mathbb{R}^n) \cap S_0.$$

**Dem.** Para cada  $x \in P(\mathbb{R}^n) \cap S_0$  seja  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $x + iR \in P(S_0)$ , temos então  $x + iR \in P(S_0) \cap S_i$  ou seja  $x \in (P(S_0) \cap S_i) - iR$ . A inclusão recíproca é óbvia.

Vamos agora ver que a união é disjunta. Seja  $i \neq j$ . Se por absurdo  $x \in (P(S_0) \cap S_i) - iR$  e  $x \in (P(S_0) \cap S_j) - jR$  então existem  $x_1, x_2 \in S_0$  tal que

$$x = P(x_1) - iR = P(x_2) - jR \Leftrightarrow P(x_1) = P(x_2 + (i - j)R),$$

logo  $x_1 = x_2 + (i - j)R$ ; o que é um absurdo. c.q.d.

**Lema 1.2.12.** *Seja  $A \subset P(\mathbb{R}^n)$  um conjunto mensurável e com a propriedade de  $A + R = A$ . Então*

$$m(A \cap S_0) = m(A \cap P(S_0)).$$

**Dem.** De facto, pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} m(A \cap S_0) &= m \left( A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [(P(S_0) \cap S_i) - iR] \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A \cap [(P(S_0) \cap S_i) - iR]) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A \cap P(S_0) \cap S_i - iR) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A \cap P(S_0) \cap S_i) \\ &= m \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap P(S_0) \cap S_i) \right) = m \left( A \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (P(S_0) \cap S_i) \right) = m(A \cap P(S_0)). \end{aligned}$$

c.q.d.

Na hipótese adicional de que  $F$  seja suficientemente regular podemos enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 1.2.13.** *Suponhamos que a aplicação de Poincaré é dissipativa. Se  $F \in C^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  e*

$$\operatorname{div}_x F(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(t, x) < -c < 0$$

*então  $m_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = 0$ .*

**Dem.** Consideremos a solução geral de (1.1),  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ . Dada uma condição inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , a função

$$Y : \mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$$Y(t) = \frac{\partial}{\partial x_0} x(t; 0, x_0)$$

é solução da equação variacional (ver [Har], pág.95)

$$\begin{cases} Y'(t) = \frac{\partial}{\partial x} F(t, x(t; 0, x_0)) Y(t) \\ Y(0) = I_n \end{cases}.$$

Utilizando a fórmula de Liouville (ver [Har], pág.46) obtemos

$$\det P'(x_0) = \det Y(T) = e^{\int_0^T \operatorname{tr} \frac{\partial}{\partial x_0} F(s, x(s; 0, x_0)) ds} < e^{-cT} < 1.$$



Concluimos que  $0 < \det P'(x_0) < e^{-cT} < 1$ , para todo o  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto  $P(e^{-1}(\overline{P}^n(\overline{B})))$  verifica as condições do lema anterior; podemos então concluir que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{C}}(\overline{P}^n(\overline{B})) &= m(P(e^{-1}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B}))) \cap S_0) \\ &= m(P(e^{-1}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B})) \cap S_0)) = m(e^{-1}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B})) \cap S_0) \det P'(x) \\ &\leq e^{-cT} m(e^{-1}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B})) \cap S_0) = e^{-cT} m_{\mathcal{C}}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B})). \end{aligned}$$

Assim, para todo o  $n \in \mathbb{N}$

$$m_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) \leq e^{-cT} m_{\mathcal{C}}(\overline{P}^{n-1}(\overline{B})) \leq e^{-ncT} m_{\mathcal{C}}(\overline{B}).$$

Dado que  $n$  é arbitrário, o resultado fica provado.

c.q.d.

Na verdade, as condições de regularidade para  $F$  na última proposição poderiam ser enfraquecidas para o caso em que  $F$  é Lipschitziana, utilizando a teoria desenvolvida em [Sa].

**Exemplo 1.2.14.** Consideremos a equação do Exemplo 1.2.3. Tomemos

$$\overline{B} = \left\{ \overline{(\theta, v)} \in \mathcal{C} : \left| v - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| < c_1 \right\},$$

obtemos

$$\overline{P}(\overline{B}) = \left\{ \overline{(\theta, v)} \in \mathcal{C} : \left| v - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| < e^{-2\pi} c_1 \right\}$$

e mais geralmente

$$\overline{P}^n(\overline{B}) = \left\{ \overline{(\theta, v)} \in \mathcal{C} : \left| v - \left( -\frac{1}{2} \right) \right| < e^{-2n\pi} c_1 \right\}.$$

Concluimos que

$$\mathcal{A} = \left\{ \overline{(\theta, v)} \in \mathcal{C} : v = -\frac{1}{2} \right\}.$$

### 1.3 Um exemplo típico de sistema dissipativo

Estudaremos neste capítulo o sistema de equações em  $\mathbb{R}^n$

$$x' = Cx + J(t, x), \tag{1.5}$$

onde  $C$  é uma matriz com um valor próprio  $\lambda_1 = 0$  com espaço próprio unidimensional gerado por um vector  $R$  e todos os restantes valores próprios têm parte real negativa. Vamos supor que a função  $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua e para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$$J(t, x + R) = J(t + T, x) = J(t, x),$$

onde  $T$  é uma constante positiva. Finalmente, vamos supor que  $J$  é tal que (1.5) têm existência e unicidade de solução para cada conjunto de condições iniciais. Obtemos desta forma um sistema do tipo de (1.1).

Pretendemos encontrar condições para que a aplicação de Poincaré associada à equação (1.5) seja dissipativa. Vamos começar por recordar a forma canónica real de uma matriz (ver [HoJo]).

**Teorema 1.3.1.** *Dada uma matriz  $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , existe  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  invertível e tal que  $S^{-1}CS$  é uma matriz com a forma*

$$\begin{pmatrix} B_{n_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & B_{n_2}(\lambda_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & B_{n_p}(\lambda_p) & & \\ & & & & Z_{n_q}(a_q, b_q) & \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & & Z_{n_r}(a_r, b_r) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  são os valores próprios reais de  $C$ , não necessariamente distintos, e  $a_q \pm b_q i, \dots, a_r \pm b_r i$ , com  $a_q, b_q, \dots, a_r, b_r \in \mathbb{R}$ , são os valores próprios complexos de  $C$  e  $n_1 + \dots + n_p + n_q + \dots + n_r = n$ . Cada bloco  $B_{n_k}(\lambda_k)$  é uma matriz de Jordan em  $M_{n_k \times n_k}(\mathbb{R})$  da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

e  $Z_{n_k}(a_k, b_k)$  é uma matriz em  $M_{n_k \times n_k}(\mathbb{R})$  com a forma

$$\begin{pmatrix} N(a_k, b_k) & I_2 & & 0 \\ & N(a_k, b_k) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & N(a_k, b_k) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

onde  $N(a_k, b_k) = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ .

No caso particular de  $C$  ser semelhante a uma matriz da forma de (1.6) com  $n_1 = \dots = n_p = 1$  e  $n_q = \dots = n_r = 2$ , o que acontece por exemplo quando cada um dos valores próprios tiver multiplicidade algébrica 1, diremos que  $C$  é semi-simples.

Consideremos então uma matriz invertível em  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $S^{-1}CS$  tem a forma de (1.6) e tal que  $B_{n_1}(\lambda_1) = 0$  é a matriz nula em  $M_{1 \times 1}(\mathbb{R})$ . Consideremos  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canónica em  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.3.2.** *Seja  $C$  a matriz do problema (1.5) e suponhamos que*

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \beta \quad (1.9)$$

*para todo o valor próprio  $\lambda$  não nulo de  $C$ . Então existe uma matriz invertível  $U$  tal que*

$$(UCx)^*Ux \leq \beta \|Ux\|^2$$

*para todo o  $x \in S(\operatorname{span}\{e_2, \dots, e_n\})$ . Além disso, se  $C$  for semi-simples podemos permitir a igualdade em (1.9).*

**Dem.** A demonstração é adaptada de um resultado semelhante em [HiSm]. Consideramos em primeiro lugar o caso em que  $C$  é semi-simples. Vamos supor que  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \beta$  para todo o valor próprio não nulo  $\lambda$  de  $C$ . Neste caso,  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é tal que

$$S^{-1}CS = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_p & & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} a_{p+1} & -b_{p+1} \\ b_{p+1} & a_{p+1} \end{pmatrix} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \begin{pmatrix} a_{n-1} & -b_{n-1} \\ b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

onde  $\lambda_2, \dots, \lambda_p$  são os valores próprios reais de  $C$  e  $\lambda_{p+1} = a_{p+1} + b_{p+1}i$ ,  $\lambda_{p+2} = a_{p+1} - b_{p+1}i, \dots, \lambda_n = a_{n-1} - b_{n-1}i$  são os valores próprios complexos de  $C$ . Tomemos a base  $\{Se_1, \dots, Se_n\}$ , onde  $Se_1 \in \operatorname{Ker} C = \operatorname{span}\{R\}$ . Deste modo temos

$$(S^{-1}CSe_i)^*e_j = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i = j = 1, \dots, p; \\ a_i \text{ ou } a_{i-1} & \text{se } i = j > p; \\ -b_{i-1} & \text{se } i = p+2, p+4, \dots, n \text{ e } j = i-1; \\ b_i & \text{se } i = p+1, p+3, \dots, n-1 \text{ e } j = i+1; \\ 0 & \text{em todos os outros casos.} \end{cases}$$

Assim, se  $x \in S(\text{span}\{e_2, \dots, e_n\})$  se escrever como  $x = \sum_{i=2}^n x_i S e_i$ , temos

$$\begin{aligned} (S^{-1}Cx)^* S^{-1}x &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j (S^{-1}C S e_i)^* e_j \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=p+1, p+3, \dots, n-1} (x_i^2 a_i + x_{i+1}^2 a_i) \leq \beta \|S^{-1}x\|^2, \end{aligned}$$

pelo que o resultado é verificado com  $U = S^{-1}$ .

Consideremos agora o caso geral. Observemos que  $\mathbb{R}^n$  se decompõe numa soma directa de subespaços invariantes por  $S^{-1}CS$ , de tal forma que a restrição da aplicação linear  $S^{-1}CS$  a cada um destes subespaços tem como representação matricial um dos blocos de (1.6). Vamos fazer a demonstração no caso em que  $S^{-1}CS$  tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & & & \lambda_k \end{pmatrix},$$

o caso geral tem uma demonstração análoga. Dado  $\epsilon > 0$ , consideremos a matriz  $S_\epsilon = \text{diag}(0, 1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1})$ , temos

$$S_\epsilon^{-1} S^{-1} C S S_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \epsilon & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_k & \epsilon \\ 0 & \cdots & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Consideremos agora a base  $\mathcal{B}_\epsilon = \{S S_\epsilon e_1, S S_\epsilon e_2, \dots, S S_\epsilon e_n\}$ . Se  $x \in S(\text{span}\{e_2, \dots, e_n\})$  se escrever como  $x = \sum_{i=2}^n x_i S S_\epsilon e_i$  temos

$$\begin{aligned} ((S S_\epsilon)^{-1} C x)^* (S S_\epsilon)^{-1} x &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n x_i x_j (S_\epsilon^{-1} S^{-1} C S S_\epsilon e_i)^* e_j \\ &= \sum_{i=2}^n x_i^2 \lambda_k + \sum_{i=3}^n x_i x_{i-1} \epsilon \leq (\lambda_k + (n-3)\epsilon) \|(S S_\epsilon)^{-1} x\|^2. \end{aligned}$$

Pelo que se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno o resultado fica provado com  $U = (S S_\epsilon)^{-1}$ . c.q.d.

Vamos denotar por

$$\Lambda = -\max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \text{ é um valor próprio de } C \text{ não nulo}\}$$

o valor absoluto da maior parte real dos valores não nulos de  $C$ .

Vamos de seguida ver condições para que (1.5) seja dissipativa. Em [Pl] podemos encontrar critérios do mesmo tipo para equações definidas em  $\mathbb{R}^n$  e onde se supõe que todos os valores próprios de  $C$  são negativos.

**Proposição 1.3.3.** *Se existirem constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq p < 1$  tal que*

$$\|J(t, x)\| \leq c_1\|x\|^p + c_2, \quad (1.10)$$

*para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , então a aplicação de Poincaré associada ao sistema (1.5) é dissipativa.*

**Proof:** Consideremos a projecção sobre  $S(\operatorname{span}\{e_2, \dots, e_n\})$  tal que  $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{span}\{R\}$ . Observemos que, dado  $x \in \mathbb{R}^n$  podemos escrever  $x = Qx + kR + \alpha R$  com  $\alpha \in [0, 1[$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , temos então

$$\|J(t, x)\| = \|J(t, x + \alpha R)\| \leq c_1(\|Qx\| + \alpha\|R\|)^p + c_2 \leq c_1\|Qx\|^p + \|R\|^p + c_2.$$

Aplicando  $Q$  a ambos os lados da equação (1.5) e observando que  $Q$  comuta com  $C$ , obtemos

$$Qx'(t) = CQx(t) + QJ(t, x(t)).$$

Como as condições da última proposição são satisfeitas com  $\beta = -\Lambda/2$ , consideremos a matriz  $U$  tal que

$$(UCx)^*Ux \leq -\frac{\Lambda}{2}\|Ux\|^2,$$

para todo o  $x \in S(\operatorname{span}\{e_2, \dots, e_n\})$ . Temos então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|UQx(t)\|^2 &= 2(UCQx(t) + UQJ(t, x(t)))^*UQx(t) \\ &\leq -\Lambda\|UQx(t)\|^2 + c_4\|UQx(t)\|^{p+1} + c_5\|UQx(t)\|, \end{aligned}$$

para algumas constantes  $c_4, c_5$ . Para cada  $\rho > 0$  consideremos o conjunto

$$B_\rho = \{\bar{x} \in \mathcal{C} : \|UQ(x)\|^2 \leq \rho\}.$$

Se fixarmos uma constante  $\rho_0$  suficientemente grande de forma a que  $-\Lambda\rho^2 + c_4\rho^{p+1} + c_5\rho < -1$ , para todo o  $\rho > \rho_0$ , então se  $\|UQx(t_0)\|^2 = \rho_1 > \rho_0$  temos  $\|UQx(t)\|^2 < \rho_0$  para todo o  $t > t_0 + \rho_1 - \rho_0$ . Concluimos que  $B = B_{\rho_0}$  é uma janela para a aplicação de Poincaré. c.q.d.

## 1.4 Condições gerais para a existência de um atractor homeomorfo a $\mathbb{T}^1$

Pretendemos encontrar condições para que o atractor  $\mathcal{A}$  seja homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Consideremos a seguinte condição:

$$(F_1) \left| \begin{array}{l} \text{Consideremos um subspaço vectorial } \mathcal{F} \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ de dimensão } n-1, \text{ tal} \\ \text{que } R \notin \mathcal{F}. \text{ Suponhamos que para cada par de soluções } x_1 \text{ e } x_2 \text{ de} \\ (1.1) \text{ distintas e limitadas em } \mathcal{C}, \text{ temos } x_1(0) - x_2(0) \notin \mathcal{F}. \end{array} \right.$$

Pretendemos mostrar nesta secção que se  $\overline{P}$  for dissipativa e se  $(F_1)$  for satisfeita então a função  $\pi_{/\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$  definida na Secção 1.2. é um homeomorfismo. Mostrámos na Secção 1.2 que  $\pi_{/\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$  é sobrejectiva. Antes de mostrarmos que  $(F_1)$  é suficiente para que  $\pi_{/\mathcal{A}}$  seja injectiva vamos ver outra caracterização de  $\mathcal{A}$ . Consideremos o conjunto de soluções de (1.1)

$$\mathcal{B} = \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : x \text{ é solução de (1.1) limitada em } \mathcal{C}\}.$$

No próximo lema mostramos que  $\mathcal{A}$  é formado pelos valores que os elementos de  $\mathcal{B}$  tomam na origem.

**Lema 1.4.1.**  $\mathcal{A} = \{\overline{x}(0) : x \in \mathcal{B}\}.$

**Dem.** Para cada  $\overline{y} \in \mathcal{A}$  tomemos a solução de (1.1) que em 0 vale  $y$ ,  $x(t) = x(t; 0, y)$ . Temos  $\overline{y} = \overline{x}(0)$  e vamos mostrar que  $x \in \mathcal{B}$ . Como  $\mathcal{A}$  é invariante para  $\overline{P}$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\overline{P}^n(\overline{y}) = \overline{P}^n(\overline{x}(0)) = \overline{x}(nT; 0, y) \in \mathcal{A}.$$

Pelo que  $\overline{x}(t)$  está bem definida em todo o  $\mathbb{R}$  e  $\overline{x}(t) \in \overline{B}$  para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

Consideremos agora  $x \in \mathcal{B}$ . Pelo Lemma 1.2.2 podemos supor sem perda de generalidade que  $\overline{x}(t) \in \overline{B}$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ ; em particular,  $\overline{x}(-nT) \in \overline{B}$  e logo  $\overline{P}^n(\overline{x}(-nT)) = \overline{x}(0) \in \overline{P}^n(\overline{B})$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Concluimos que  $\overline{x}(0) \in \mathcal{A}$ . c.q.d.

**Teorema 1.4.2.** *Supondo que  $\overline{P}$  é dissipativa e a condição  $(F_1)$  é satisfeita, a aplicação  $\pi_{/\mathcal{A}}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** Atendendo ao Lema 1.4.1, consideramos  $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$  tal que  $\overline{x}_1(0) \neq \overline{x}_2(0)$ . Vamos supor, com vista a um absurdo, que  $\pi(\overline{x}_1(0)) = \pi(\overline{x}_2(0))$  ou seja

$$\frac{1}{\|R\|^2}[(I - Q)x_1(0)]^*R = \frac{1}{\|R\|^2}[(I - Q)x_2(0)]^*R$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [(I - Q)(x_1(0) - x_2(0))]^* R &= k \|R\|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow (I - Q)(x_1(0) - x_2(0)) &= kR, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Consideremos  $\tilde{x}_2 = x_2 + kR$ ,  $\tilde{x}_2$  ainda é solução de (1.1) em  $\mathcal{B}$ . Além disso,  $\overline{\tilde{x}_2}(0) = \overline{x_2}(0) \neq \overline{x_1}(0)$ ; logo  $\tilde{x}_2$  e  $x_1$  são soluções distintas de (1.1) em  $\mathcal{B}$  tal que  $(I - Q)(x_1(0) - \tilde{x}_2(0)) = 0$  ou seja,  $x_1(0) - \tilde{x}_2(0) \in \mathcal{F}$  o que dá um absurdo com  $(F_1)$ . Concluimos que  $\pi/\mathcal{A}$  é injectiva. Dado que  $\pi/\mathcal{A}$  é uma função injectiva, contínua, definida num compacto e com valores num espaço separado, concluimos que tem inversa contínua. c.q.d.

Gostaríamos de salientar que nas condições do teorema anterior,  $\mathcal{A}$  não só é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  como é mesmo um gráfico de uma função de  $\mathbb{T}^1$  em  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 1.4.3.** Consideremos a equação do Exemplo 1.2.3. Tomemos  $\mathcal{F} = \text{span}\{(0, 1)^*\}$  e  $Q$  a projecção ortogonal sobre  $\mathcal{F}$ . Se  $x_1(t) = x(t; t_1, \theta_1, v_1)$  e  $x_2(t) = x(t; t_2, \theta_2, v_2)$  são duas soluções distintas de (1.1) então por (1.3),  $x_1$  e  $x_2$  são limitadas em  $\mathcal{C}$  sse

$$v_i - \frac{\sin t_i - \cos t_i}{2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Pelo que se  $x_1, x_2$  são limitadas temos que

$$x_1(0) - x_2(0) = -(t_1 - t_2) + \theta_1 - \theta_2, 0)$$

é constante. Se por absurdo  $x_1(0) - x_2(0) \in \mathcal{F}$ , temos  $t_1 = t_2$  e  $\theta_1 = \theta_2$ , pelo que de (1.3) concluimos que

$$x_1(t) = \left( t - t_1 + \theta_1, \frac{\sin t - \cos t}{2} \right)^* = x_2(t),$$

o que é um absurdo. O Teorema 1.4.2 garante-nos que  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ , facto que já tínhamos observado no Exemplo 1.2.14.





## Capítulo 2

# A equação do tipo do pêndulo com atrito

Como um primeiro exemplo de aplicação da teoria que temos vindo a desenvolver, tomemos a equação

$$x'' + h(x)x' + g(t, x) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, que verificam as seguintes condições de periodicidade

$$h(x+1) = h(x),$$

$$g(t+T, x) = g(t, x) = g(t, x+1),$$

para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$  e alguma constante positiva  $T$ . Vamos também supor que  $h$  é estritamente positiva, ou seja,

$$0 < c = \min_{\mathbb{R}} h(x).$$

Vamos supor que a equação acima tem existência e unicidade para cada conjunto de condições iniciais.

Considerando uma das primitivas de  $h$ ,  $H(x) = \int_0^x h(s)ds$ , observamos que  $x$  é solução de (2.1) se e só se  $(x, x' + H(x))$  é solução de

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - H(y_1) \\ y_2' = -g(t, y_1) \end{cases}. \quad (2.2)$$

O sistema acima tem a forma

$$y' = F(t, y)$$

com  $y = (y_1, y_2)^*$  e  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(t, y_1, y_2) = (y_2 - H(y_1), -g(t, y_1))^*$ . Escrevendo  $h = \tilde{h} + \bar{h}$ , onde  $\bar{h} = \int_0^1 h(s)ds$  e  $\int_0^1 \tilde{h}(s)ds = 0$  obtemos

$$H(x+1) = \int_0^x h(s)ds + \int_x^{x+1} [\tilde{h}(s) + \bar{h}]ds = H(x) + \bar{h}. \quad (2.3)$$

Deste modo, tomando  $R = (1, \bar{h})^*$  obtemos

$$F(t, y + R) = F(t, y),$$

para todo o  $(t, y) \in \mathbb{R}^3$ , ou seja, o sistema (2.2) é do tipo dos estudados no último capítulo.

No presente capítulo vamos ver que a aplicação de Poincaré associada a (2.2) é dissipativa e que se o declive de qualquer secante ao gráfico de  $g(t, \cdot)$  for inferior a  $c^2/4$  então  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Na segunda secção mostramos como o aparecimento de soluções inversamente instáveis implica que o atrator não seja topologicamente um círculo. Utilizaremos este resultado para mostrar que a constante  $c^2/4$  é optimal. Na última secção mostraremos o mesmo facto a partir de uma classe de equações autónomas para as quais  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .

## 2.1 Existência de um atrator unidimensional

De (2.3) concluímos que

$$H(x) = \bar{h}x + \theta(x),$$

onde  $\theta$  é uma função 1-periódica. Não é difícil de concluir que

$$\|F(t, y)\| \leq a\|y\| + b,$$

para todo o  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  e onde  $a, b$  são constantes reais positivas. Concluímos então que as soluções de (2.2) estão definidas para todo o tempo e consequentemente a aplicação de Poincaré é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  nele próprio.

**Lema 2.1.1.** *A aplicação de Poincaré associada ao sistema (2.2) é dissipativa.*

**Dem.** Observemos que (2.2) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\bar{h} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{h}y_1 - H(y_1) \\ -g(t, y_1) \end{pmatrix}.$$

Desta forma obtemos um sistema do tipo de (1.5) onde  $\begin{pmatrix} -\bar{h} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  é uma matriz com valores próprios 0 e  $-\bar{h}$  e vectores próprios associados  $R$  e  $(1, 0)^*$  respectivamente. Dado que a função  $(y_1, y_2) \rightarrow (\bar{h}y_1 - H(y_1), -g(t, y_1))^*$  é limitada, o resultado sai do Lema 1.3.3. c.q.d.

Pelo lema anterior e do Capítulo 1 podemos concluir que existe um atrator  $\mathcal{A}$  para a aplicação de Poincaré associada à equação (2.2) que é não vazio e compacto. Além disso, a Proposição 1.2.9 diz-nos que  $\mathcal{A}$  se projecta de uma forma sobrejectiva sobre  $\mathbb{T}^1$ .

**Corolário 2.1.2.** *Se  $g$  é continuamente diferenciável na segunda variável então  $m_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}) = 0$ .*

**Dem.** Temos

$$\operatorname{div} F = -h(y_1) < -c < 0,$$

logo o resultado é consequência da Proposição 1.2.13. c.q.d.

Resta ver em que condições (2.2) verifica  $(F_1)$ .

**Teorema 2.1.3.** *Se existir uma constante  $c_1$  tal que*

$$c_1 < \frac{g(t, x) - g(t, y)}{x - y} < \frac{c^2}{4},$$

*para todo o  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ , com  $x \neq y$ , então  $\pi|_{\mathcal{A}}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** Pelo Teorema 1.4.2 só temos de verificar que a equação (2.2) verifica a condição  $(F_1)$ . Vamos considerar, neste caso,  $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{(-\bar{h}, 1)^*\}$  o subespaço unidimensional ortogonal a  $\operatorname{span}\{R\}$  e a projecção ortogonal  $Q$  sobre  $\mathcal{F}$  tal que  $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{span}\{R\}$ . Consideremos duas soluções  $x = (x_1, x_2)^*$  e  $y = (y_1, y_2)^*$  de (2.2) distintas, limitadas em  $\mathcal{C}$  e  $(\xi, \eta)^* = x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)^*$ . A função  $(\xi, \eta)$  é solução da equação

$$\begin{cases} \xi' = \eta - \alpha(t)\xi \\ \eta' = -\beta(t)\xi \end{cases},$$

onde

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{H(x_1(t)) - H(y_1(t))}{x_1(t) - y_1(t)} & \text{se } x_1(t) \neq y_1(t) \\ 0 & \text{se } x_1(t) = y_1(t) \end{cases}$$

e

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{g(t, x_1(t)) - g(t, y_1(t))}{x_1(t) - y_1(t)} & \text{se } x_1(t) \neq y_1(t) \\ 0 & \text{se } x_1(t) = y_1(t) \end{cases}.$$

Observemos que  $\alpha$  e  $\beta$  não são necessariamente contínuas embora sejam mensuráveis e limitadas. Notemos ainda que para todo o  $t \in \mathbb{R}$  para o qual  $x_1(t) \neq y_1(t)$  (ou seja  $\xi \neq 0$ ) temos  $\alpha(t) \geq c$  e  $\beta(t) < \frac{c^2}{4}$ . Para todo o ponto onde  $\xi \neq 0$  a função  $\gamma = \frac{\eta}{\xi}$  verifica

$$\gamma' = \frac{-\beta(t)\xi^2 - \eta^2 + \alpha(t)\xi\eta}{\xi^2} = -\beta(t) - \gamma^2 + \alpha(t)\gamma,$$

ou seja,  $\gamma$  é solução da equação de Ricatti

$$\gamma' = -\gamma^2 + \alpha(t)\gamma - \beta(t). \quad (2.4)$$

Dado que  $\alpha$  e  $\beta$  são limitadas, se tomarmos uma constante suficientemente grande obtemos uma sobre-solução de (2.4), ou seja, uma constante  $M$  tal que  $\gamma'(t) < 0$  sempre que  $\gamma(t) = M$ . Por outro lado, se para algum  $t \in \mathbb{R}$   $\gamma(t) = c/2$  então

$$\gamma'(t) = -\gamma^2 + \alpha(t)\gamma - \beta(t) > -\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 0.$$

Concluimos que  $c/2$  é uma sub-solução de (2.4) (ver Figura 2.1). Traduzindo

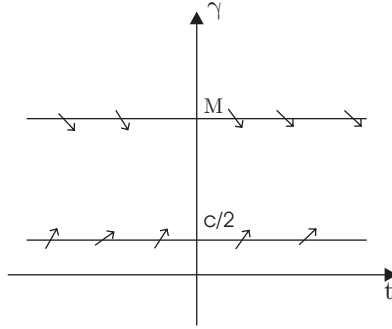


Figura 2.1:

o que vimos até aqui em termos de  $\xi$  e  $\eta$ , observamos que sempre que uma solução entra na zona a sombreado da Figura 2.2 já não volta a sair.

Vamos ainda supor que  $M$  é suficientemente grande, de modo a que  $\alpha(t) < M/2$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Analisemos agora a derivada de  $\xi$  fora da área a sombreado. Temos seis situações distintas:

- Se  $\eta < c\xi$  e  $\xi > 0$  então  $\xi' = \eta - \alpha(t)\xi < (c - \alpha(t))\xi < 0$ .
- Se  $\eta < 0$  e  $\xi = 0$  então  $\xi' = \eta < 0$ .
- Se  $\eta < \frac{M}{2}\xi$  e  $\xi < 0$  então  $\xi' = \eta - \alpha(t)\xi < (\frac{M}{2} - \alpha(t))\xi < 0$ .
- Se  $\eta > \frac{M}{2}\xi$  e  $\xi > 0$  então  $\xi' = \eta - \alpha(t)\xi > (\frac{M}{2} - \alpha(t))\xi > 0$ .
- Se  $\eta > 0$  e  $\xi = 0$  então  $\xi' = \eta > 0$ .
- Se  $\eta > c\xi$  e  $\xi < 0$  então  $\xi' = \eta - \alpha(t)\xi > (c - \alpha(t))\xi > 0$ .

Podemos resumir a informação obtida até aqui na Figura 2.2. Suponhamos

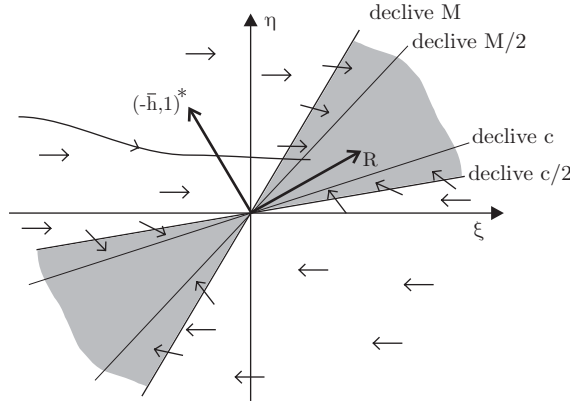


Figura 2.2:

por absurdo que  $x_1(0) - x_2(0) = (\xi(0), \eta(0))^* \in \mathcal{F}$ . Temos que  $(\xi(0), \eta(0)) \neq (0, 0)$ , por unicidade. Vamos assumir que  $(\xi(0), \eta(0))(-\bar{h}, 1)^* > 0$ , o outro caso é análogo. Concluimos que  $\xi'(t) > 0$ , para todo o  $t \leq 0$ , em particular  $\xi(t) < \xi(0) < 0$ , para  $t < 0$ . Como  $\eta(t) > \frac{c}{2}\xi(t)$ , para todo o  $t < 0$ , obtemos

$$\xi'(t) = \eta(t) - \alpha(t)\xi(t) > \left(\frac{c}{2} - \alpha(t)\right)\xi(t) > -\frac{c}{2}\xi(0) > 0,$$

para todo o  $t < 0$ , pelo que  $\xi \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Finalmente

$$(\xi(t), \eta(t))(-\bar{h}, 1)^* \geq \left(\frac{c}{2} - \bar{h}\right)\xi(t) \rightarrow +\infty$$

quando  $t \rightarrow -\infty$ , logo  $x(t) - y(t)$  (e consequentemente  $x(t)$  ou  $y(t)$ ) é ilimitada em  $\mathcal{C}$  o que dá o absurdo. c.q.d.

As estimativas obtidas no teorema anterior são semelhantes às obtidas em [Le] e [MiXiJi] para casos particulares de equações do tipo de (2.2), onde em particular se exige que  $g$  seja continuamente diferenciável na segunda variável.

## 2.2 Condições para que $\mathcal{A}$ não seja homeomorfo a $\mathbb{T}^1$

Acabámos de ver, na secção anterior, que as órbitas dadas por iteradas da aplicação de Poincaré associada à equação (2.2) convergem, no espaço de fases  $\mathcal{C}$ , para um atractor  $\mathcal{A}$  não-vazio e compacto. Vimos além disso condições para que  $\mathcal{A}$  seja homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Supondo que  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ , vamos definir o número de rotação associado à equação (2.2), ao qual, como veremos, está associada muita informação acerca da dinâmica desta equação.

Suponhamos que  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Seja

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$$

um homeomorfismo. Consideremos também a aplicação canónica

$$\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$$

$$x \rightarrow \bar{x}$$

e a restrição da aplicação de Poincaré associada à equação (2.2)

$$\bar{P}_{/\mathcal{A}} : \mathcal{A} \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A},$$

que, como vimos no Capítulo 1, forma um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para ele próprio.

**Lema 2.2.1.** *Se  $\varphi$  for um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ , existe um homeomorfismo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica uma das seguintes igualdades*

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{ou} \quad f(x+1) = f(x) - 1, \quad (2.5)$$

para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e que torna o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & \bar{P}_{/\mathcal{A}} & \\ \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ \varphi^{-1} \uparrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ \mathbb{T}^1 & \rightarrow & \mathbb{T}^1 \\ \tau \uparrow & \bar{f} & \uparrow \tau \\ \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \end{array}$$

Além disso, se  $f_1$  for outro homeomorfismo nas mesmas condições de  $f$ , então  $f = f_1 + N$  para algum  $N \in \mathbb{Z}$ .

**Dem.** Ver [ArPl], pág.7.

Diremos que  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  preserva ou inverte a orientação se for válida a primeira ou a segunda igualdade em (2.5) respectivamente. Intuitivamente, a aplicação de Poincaré preserva a orientação em  $\mathcal{C}$ , contudo não é óbvio que a sua restrição a  $\mathcal{A}$  preserve a orientação. Observemos que por exemplo a aplicação  $(\theta, r) \rightarrow (-\theta, -r/2)$  preserva a orientação no cilindro (onde identificámos os pontos  $(\theta, r)$  e  $(\theta + k, r)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) mas a sua restrição à curva invariante  $r = 0$  não preserva a orientação. Vamos então provar rigorosamente que  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  preserva a orientação.

**Lema 2.2.2.** *Se  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  e  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  não preserva a orientação, então existem exactamente dois pontos fixos de  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$ , digamos  $A$  e  $B$ , que dividem  $\mathcal{A}$  em dois arcos  $C_+$  e  $C_-$  ( $\mathcal{A} = A \dot{\cup} B \dot{\cup} C_+ \dot{\cup} C_-$ ) tal que  $\overline{P}(C_+) = C_-$  e  $\overline{P}(C_-) = C_+$ .*

**Dem.** Suponhamos que  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$  é um homeomorfismo. Se  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  não preserva a orientação então a função  $f$  dada pelo lema anterior é decrescente. A função intersecta as rectas do tipo  $y = x + 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  em pontos da forma  $a + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e as rectas  $y = x + 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , em pontos da forma  $b + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (supomos que  $b \in ]a, a+1[$ ,  $f(a) = a$  e  $f(b) = b-1$ ). Temos então  $f([a, b]) = [b-1, a]$  e  $f([b, a+1]) = [a-1, b-1]$ . Definindo  $A = \varphi^{-1} \circ \tau(a)$ ,  $B = \varphi^{-1} \circ \tau(b)$ ,  $C_+ = \varphi^{-1} \circ \tau([a, b])$  e  $C_- = \varphi^{-1} \circ \tau([b, a+1])$  o lema fica provado. c.q.d.

**Proposição 2.2.3.** *Se  $\mathcal{A}$  for homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  então  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  preserva a orientação.*

**Proof.** Suponhamos por absurdo que  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  não preserva a orientação. Consideremos os pontos  $A$ ,  $B$  e os arcos  $C_+$ ,  $C_-$  dados pelo último lema. Consideremos uma parametrização contínua de  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\alpha(0) = \alpha(1) = A$ ,  $\alpha(1/2) = B$ ,  $\alpha(]0, 1/2[) = C_+$ ,  $\alpha(]1/2, 1[) = C_-$  e tal que a restrição de  $\alpha$  no intervalo  $]0, 1[$  seja injectiva. Foi provado em [RiWi2] que a inclusão  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  induz um isomorfismo na cohomologia de Čech  $i^* : \check{H}^*(\mathcal{C}) \rightarrow \check{H}^*(\mathcal{A})$ . Desta forma,  $\mathcal{A}$  não é contráctil em  $\mathcal{C}$  e logo a curva  $\alpha$  define um elemento não trivial do grupo fundamental topológico de  $\mathcal{C}$ . A curva  $\overline{P} \circ \alpha$  é homotópica a  $\alpha$ . De facto,  $H_1 : [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  definida

por  $H_1(\lambda, t) = \overline{y(\lambda; 0, \alpha(t))}$ , é uma homotopia. Assim  $\overline{P} \circ \alpha$  define o mesmo elemento do grupo fundamental  $\pi_1(C)$  que  $\alpha$ . A curva

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ (\overline{P} \circ \alpha)(2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

deveria definir um elemento não trivial de  $\pi_1(C)$ , mas é homotópica ao ponto  $A$  pela homotopia  $H_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  definida por

$$H_2(\lambda, t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [0, \lambda/2] \\ \gamma(\lambda/2) & \text{se } t \in [\lambda/2, \psi(\lambda/2)] \\ \gamma(t) & \text{se } t \in [\psi(\lambda/2), 1] \end{cases},$$

onde  $\psi : [0, 1/2] \rightarrow [1/2, 1]$  é definida por

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\alpha^{-1}(\overline{P}^{-1}(\alpha(2t))) + 1}{2} & \text{se } t \in ]0, 1/2[ \\ \psi(0) = 1, \psi(1/2) = 1/2 & \end{cases}.$$

O que dá um absurdo.

c.q.d.

Consideremos  $f$  dada pelo Lema 2.2.1. Definimos o número de rotação de  $f$  por

$$\mu(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^n(\theta)}{n}.$$

Número este que existe para todo o  $\theta \in \mathbb{R}$  e não depende de  $\theta$  (ver [KaHa], pág.387). Ainda pela última parte do Lema 2.2.1 fica bem definido  $\rho(\overline{P}_{/\mathcal{A}})$ , o número de rotação associado a  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$ , pelo elemento de  $\mathbb{T}^1$

$$\rho(\overline{P}_{/\mathcal{A}}) = \mu(f) + \mathbb{Z}.$$

Um número de rotação racional para  $f$  determina o tipo de pontos periódicos que podem existir em  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$ , ou seja:

**Lema 2.2.4.** *Suponhamos que existe  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\rho(\overline{P}_{/\mathcal{A}}) = \frac{n}{m} + \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

*onde  $\frac{n}{m}$  é uma fracção irredutível (se  $n = 0$  então  $m = 1$ ). Então  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  tem pelo menos um ponto periódico de período mínimo  $m$ , além disso qualquer outro ponto periódico de  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  tem período mínimo  $m$ . Reciprocamente, se  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  tem um ponto periódico de período mínimo  $m$  então existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que o número de rotação de  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$  tem a forma (2.6).*



**Dem.** Ver [KaHa], pág.386, 389.

Diremos que uma solução  $y$  de (2.2) é  $(a, b)$ -periódica, para  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \geq 1$ , sse

$$y(t + bT) = y(t) + aR,$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Intuitivamente, uma solução  $(a, b)$ -periódica é uma solução  $bT$ -periódica em  $\mathcal{C}$  que dá a volta ao cilindro  $a$  vezes em cada período. Existe uma correspondência entre as soluções  $(a, b)$ -periódicas e os pontos periódicos de período  $b$  da aplicação de Poincaré. Mais concretamente, se  $y$  for uma solução  $(a, b)$ -periódica de (2.2), temos

$$\overline{P^b}(y(0)) = \overline{y(0)},$$

ou seja,  $\overline{y(0)} \in \mathcal{A}$  e  $\overline{y(0)}$  é um ponto periódico de  $\overline{P}_{/\mathcal{A}}$ , de período  $b$ . Reciprocamente, se existe  $\overline{y_0} \in \mathcal{A}$  tal que

$$\overline{P}_{/\mathcal{A}}^b(\overline{y_0}) = \overline{y_0}$$

então a solução  $y(t) = y(t; 0, y_0)$  verifica  $y(bT) = y(0) + aR$ , para algum  $a \in \mathbb{Z}$ . Como  $y(t)$  e  $y(t + bT) - aR$  são ambas soluções de (2.2) e verificam as mesmas condições iniciais, concluímos que são a mesma solução, ou seja,

$$y(t + bT) - aR = y(t),$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}$  e  $y$  é  $(a, b)$ -periódica.

Como vimos, se  $y$  é uma solução de (2.2)  $(a, b)$ -periódica então  $y(0)$  é um ponto fixo de  $P^b - aR : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Supondo que  $y(0)$  é um ponto fixo isolado desta aplicação, podemos definir o índice de  $y$  como

$$\gamma_b(y) = \deg(I - [P^b - aR], B),$$

onde  $\deg$  designa o grau de Brouwer e  $B \subset \mathbb{R}^n$  é um disco suficientemente pequeno de modo a que  $y(0)$  seja o único ponto fixo de  $P^b - aR$  em  $B$ .

Se  $y$  for uma solução  $(a, b)$ -periódica de (2.2) então esta mesma solução é também  $(2a, 2b)$ -periódica. Diremos que  $y$  é inversamente instável se  $y(0)$  for um ponto fixo isolado de  $P^b - aR$  e de  $P^{2b} - 2aR$  e se

$$\gamma_b(y) = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_{2b}(y) = -1.$$

Consideremos uma equação linear homogénea

$$x' = A(t)x, \quad x \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \tag{2.7}$$

onde  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  é contínua e  $T$ -periódica. Se  $x(t)$  é solução de (2.7) e verifica a condição inicial  $x(0) = I_2$  então  $x(T)$  é chamada uma matrix de monodromia de (2.7) e os seus valores próprios  $\mu_1, \mu_2$  são chamados multiplicadores característicos de (2.7) (ver Teoria de Floquet em [Har]). Diremos que a equação (2.7) é inversamente instável se os seus multiplicadores característicos satisfazem

$$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0.$$

A partir de agora vamos assumir mais regularidade para a equação (2.2), mais concretamente, vamos supor que existe  $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$ , para todo o  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , e que  $\frac{\partial g}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Deste modo a aplicação de Poincaré é continuamente diferenciável (ver Apêndice 1). Dada uma solução  $y$  de (2.2)  $(a, b)$ -periódica, a função

$$Y(t) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t; 0, y_0)$$

está bem definida e é solução da equação variacional (ou também chamada a equação linearizada em torno de  $y$ )

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} -h(y_1(t)) & 1 \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(t, y_1(t)) & 0 \end{pmatrix} Y(t) \quad (2.8)$$

e verifica a condição inicial  $Y(0) = I_2$  (ver [Har], pág.95). Dado que  $y$  é uma solução  $(a, b)$ -periódica, a função matricial

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} -h(y_1(t)) & 1 \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(t, y_1(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

é  $bT$ -periódica, pelo que a equação (2.8) é do tipo de (2.7). Como  $Y(bT) = (P^b)'(y(0))$ , os multiplicadores característicos de (2.8) são os valores próprios de  $(P^b)'(y(0))$ . Desta forma, ou um dos multiplicadores característicos,  $\mu_1, \mu_2$  toma o valor 1, e nesse caso diremos que  $y$  é degenerada, ou  $y(0)$  é ponto fixo isolado de  $P^b - aR$  e podemos calcular o índice de  $y$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} \gamma_b(y) &= \deg(I - [P^b - aR], B) \\ &= \text{sign}\{\det(I - (P^b)'(y(0)))\} = \text{sign}\{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\}. \end{aligned}$$

Segundo N. Levinson [Lev] uma solução  $y$  de (2.2)  $(a, b)$ -periódica é inversamente instável se os multiplicadores característicos associados verificam  $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$  (ou seja se a equação linearizada em torno de  $y$  é inversamente instável). Neste caso, e de acordo com as fórmulas acima,

$$\gamma_b(y) = \text{sign}\{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\} = 1,$$

$$\gamma_{2b}(y) = \text{sign}\{(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)\} = -1,$$

ou seja,  $y$  é uma solução inversamente instável segundo a nossa definição. Desta forma, a definição de solução inversamente instável apresentada nesta tese pode ser vista como uma versão topológica da definição de N. Levinson.

Observemos que, pela fórmula de Liouville (ver [Har], pág.46),

$$\mu_1\mu_2 = \det Y(bT) = e^{\int_0^{bT} -h(y_1(t))dt} \leq e^{-cbT},$$

pelo que

$$0 < \mu_1\mu_2 < 1.$$

Desta forma temos um número reduzido de situações. Se  $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$  então a equação linearizada (2.8) associada a  $y$  é inversamente instável e, como vimos,  $y$  é uma solução  $(a, b)$ -periódica inversamente instável de (2.2). Se  $-1 < \mu_1 < \mu_2 < 0$  ou se  $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$  temos

$$\gamma_b(y) = \text{sign}\{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\} = 1$$

$$\gamma_{2b}(y) = \text{sign}\{(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)\} = 1.$$

Se  $\mu_1 = -1 < \mu_2 < 0$ , temos  $\gamma_b(y) = 1$ , porém  $y$  é degenerada quando vista como solução  $(2a, 2b)$ -periódica, o cálculo de  $\gamma_{2b}(y)$  não se pode fazer através da linearização em torno do ponto fixo, podemos estar ou não na presença de uma solução inversamente instável. Se  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  são complexos conjugados temos  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y) = 1$ . Finalmente, se  $0 < \mu_1 < \mu_2 = 1$  então  $y$  é degenerada como solução  $(a, b)$ -periódica e como  $(2a, 2b)$ -periódica. Vamos ver nos lemas seguintes que também neste caso  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y)$ .

Consideremos um aberto limitado e convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e o espaço das funções em  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$  com a norma

$$\|f\|_1 = \sum_{i=1}^2 \sup_{\overline{\Omega}} \|f_i\| + \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} \sup_{\overline{\Omega}} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|.$$

**Lema 2.2.5.** *Consideremos uma família de funções*

$$P_\epsilon \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2), \quad \epsilon \in [0, 1],$$

de tal forma que se  $\epsilon_n$  for uma sucessão em  $[0, 1]$  a convergir para  $\epsilon_*$  então  $P_{\epsilon_n} \rightarrow P_{\epsilon_*}$  na norma de  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ . Supondo que  $0 \in \Omega$ ,  $P_0(0) = 0$  e que  $-1 \notin \sigma(P'_0(0))$ , existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $Q > 0$  tal que se  $P'_\epsilon(x) = x$  para algum  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$  e  $\|x\| < Q$  então  $P_\epsilon(x) = x$ .

**Dem.** Suponhamos, com vista a um absurdo, que existem sucessões  $\epsilon_n \rightarrow 0$  em  $[0, 1]$  e  $x_n \rightarrow 0$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que  $P_{\epsilon_n}^2(x_n) = x_n$  mas  $P_{\epsilon_n}(x_n) \neq x_n$ . Temos

$$P_{\epsilon_n}(x_n) - P_{\epsilon_n}^2(x_n) = \left[ \int_0^1 P'_{\epsilon_n}(tx_n + (1-t)P_{\epsilon_n}(x_n))dt \right] (x_n - P_{\epsilon_n}(x_n)). \quad (2.9)$$

Consideremos a sucessão limitada

$$z_n = \frac{P_{\epsilon_n}(x_n) - x_n}{\|P_{\epsilon_n}(x_n) - x_n\|}.$$

Extraímos uma subsucessão convergente para  $z$ , que ainda denotamos por  $z_n$ . Finalmente, dividindo (2.9) por  $\|P_{\epsilon_n}(x_n) - x_n\|$  e passando ao limite obtemos  $P'_0(0)z = -z$ . O que é um absurdo. c.q.d.

Para a demonstração do próximo lema usamos algumas ideias de [Or4] e [KrPePoZa].

**Lema 2.2.6.** *Suponhamos que  $y$  é uma solução  $(a, b)$ -periódica degenerada de (2.2) de tal forma que  $y_0 = y(0)$  é um ponto fixo isolado de  $P^b - aR$ . Então  $\gamma_b(y) \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $y_0$  é um ponto fixo isolado de  $P^{2b} - 2aR$  e  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y)$ .*

**Dem.** Suponhamos que os multiplicadores característicos associados a esta solução são  $\mu_1 = 1$  e  $0 < \mu_2 < 1$ . Vamos supor que  $y_0 = 0$  para simplificar a notação. Seja  $D$  uma matriz invertível tal que

$$D(P^b - aR)'(0)D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar a notação, a partir de agora escreveremos  $F = D(P^b - aR)D^{-1}$ . Escrevendo a formula de Taylor para  $F$  em torno da origem obtemos

$$F(x, y) = (x + R_1(x, y), \mu_2 y + R_2(x, y)),$$

onde  $R_i(x, y) = o(\|(x, y)\|)$ ,  $i = 1, 2$ , ou seja,

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow 0} \frac{R_i(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Dado que  $\frac{\partial(I-F)_2}{\partial y}(0, 0) = (1 - \mu_2) \neq 0$ , podemos aplicar o teorema das funções implícitas (ver [Ze], pág.250) à função  $(I - F)_2$  e concluir que existem vizinhanças  $V \subset \mathbb{R}$  de 0 e  $W \subset \mathbb{R}^2$  de  $(0, 0)$  e uma função de classe  $C^1$   $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} (I - F)_2(x, y) = 0 \\ (x, y) \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \phi(x) \\ x \in V \end{cases}.$$

Deste modo,

$$\begin{cases} (I - F)(x, y) = 0 \\ (x, y) \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_1(x, \phi(x)) = 0 \\ y = \phi(x) \\ x \in V \end{cases}.$$

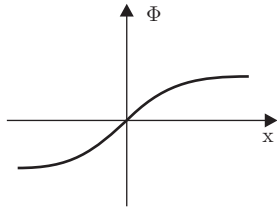
Seja

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$$

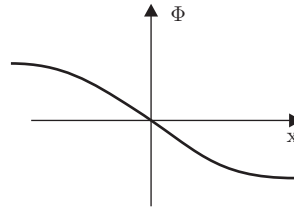
$$\Phi(x) = R_1(x, \phi(x)).$$

Dado que 0 é ponto fixo isolado de  $P^b - aR$ , podemos assumir que 0 é o único zero de  $\Phi$ . Vamos tratar separadamente os quatro tipos possíveis de comportamentos de  $\Phi$  em torno da origem, ilustrados na Figura que se segue.

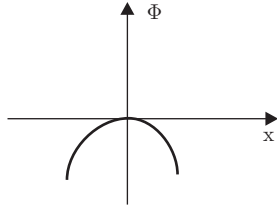
Caso 1: definimos a família de funções



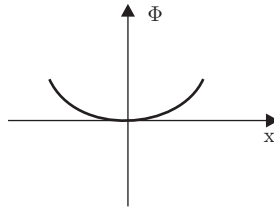
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Caso 4

Figura 2.3:

$$F_\epsilon(x, y) = ((1 + \epsilon)x + R_1(x, y), \mu_2 y + R_2(x, y)), \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Desta forma,  $F_0 = F$  e

$$\begin{cases} (I - F_\epsilon)(x, y) = 0 \\ (x, y) \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi(x) = -\epsilon x \\ y = \phi(x) \\ x \in V \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Pelo que  $F_\epsilon$ ,  $\epsilon \in [0, 1]$  forma uma homotopia admissível numa bola suficientemente pequena  $B_1$  em torno da origem. Concluimos que

$$\begin{aligned}\gamma_b(y) &= \deg(I - [P^b - aR], D^{-1}(B_1)) = \deg(I - F, B_1) \\ &= \deg(I - F_1, B_1) = \text{sign}\{\det(I - F_1)'(0, 0)\} = \text{sign}\{\mu_2 - 1\} = -1.\end{aligned}$$

Dado que  $-1 \notin \sigma(F'_0(0))$ , podemos utilizar o lema anterior com  $P_\epsilon = F_\epsilon$ . Sabemos então que existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $Q > 0$  tal que se  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ , todos os pontos fixos de  $F_\epsilon^2$  de norma inferior a  $Q$  são também pontos fixos de  $F_\epsilon$ . Em particular 0 é ponto fixo isolado de  $F^2$ . Por outro lado, se  $B_2$  é uma bola centrada na origem, de raio inferior a  $Q$  obtemos

$$\begin{aligned}\gamma_{2b}(y) &= \deg(I - [P^b - aR]^2, D^{-1}(B_2)) = \deg(I - F^2, B_2) \\ &= \deg(I - F_{\epsilon_0}^2, B_2) = \text{sign}\{\det(I - F_{\epsilon_0}^2)'(0, 0)\} \\ &= \text{sign}\{(1 - \mu_2^2)(1 - [1 + \epsilon]^2)\} = -1.\end{aligned}$$

Caso 2: definindo neste caso

$$F_\epsilon(x, y) = ((1 - \epsilon)x + R_1(x, y), \mu_2 y + R_2(x, y)), \quad \epsilon \in [0, 1],$$

e com um argumento semelhante ao Caso 1 obtemos  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y) = 1$ .

Caso 3: neste caso, definimos

$$F_\epsilon(x, y) = (-\epsilon x^2 + x + R_1(x, y), \mu_2 y + R_2(x, y)), \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Deste forma

$$\left\{ \begin{array}{l} (I - F_\epsilon)(x, y) = 0 \\ (x, y) \in W \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x) = \epsilon x^2 \\ y = \phi(x) \\ x \in V \end{array} \right\},$$

ou seja,  $F_\epsilon$  não tem pontos fixos em  $\partial W$  qualquer que seja o  $\epsilon \in [0, 1]$ . Assim,  $F_\epsilon$  é uma homotopia admissível e se  $B_1$  for uma bola suficientemente pequena temos

$$\gamma_b(y) = \deg(I - [P^b - aR], D^{-1}(B_1)) = \deg(I - F, B_1) = \deg(I - F_1, B_1) = 0.$$

Por outro lado, o lema anterior mostra que existe uma bola  $B_2$  suficientemente pequena e  $\epsilon_0$  de tal forma que  $I - F_\epsilon^2$  não tem zeros em  $\overline{B_2}$  para cada  $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ , em particular temos uma homotopia admissível. Consequentemente

$$\gamma_{2b}(y) = \deg(I - [P^b - aR]^2, D^{-1}(B_2)) = \deg(I - F^2, B_2) = \deg(I - F_{\epsilon_0}^2, B_2) = 0.$$

Caso 4: Este caso é semelhante ao caso anterior.

c.q.d.

A hipótese de que  $P$  seja de classe  $C^1$  é essencial no último lema. De facto, em [AlCa] foi construído um exemplo de um homeomorfismo  $P_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva a orientação, contrai áreas, 0 é ponto fixo isolado de qualquer iteração de  $P_1$ ,  $\deg[P_1, B] = \deg[P_1^2, B] = \deg[P_1^3, B] = 1$  e  $\deg[P_1^4, B] = -3$ , onde  $B$  é uma pequena bola em torno da origem.

A demonstração do próximo lema foi retirada de [Or1].

**Lema 2.2.7.** *Consideremos o rectângulo  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  fechado, de lados  $d \parallel e$  paralelos a  $R$  e  $f \parallel f + R$  perpendiculares a  $R$  e  $R^0 = (-\bar{h}, 1)$ ; como mostra a Figura 2.4. Suponhamos que  $F = (F_1, F_2) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma função contínua que verifica*

$$F(x) = F(x + R) \neq 0, \quad \forall x \in f; \quad (2.10)$$

$$F(x)^* R^0 < 0, \quad \forall x \in d; \quad (2.11)$$

$$F(x)^* R^0 > 0, \quad \forall x \in e. \quad (2.12)$$

Então  $\deg[F, \Sigma] = 0$ .

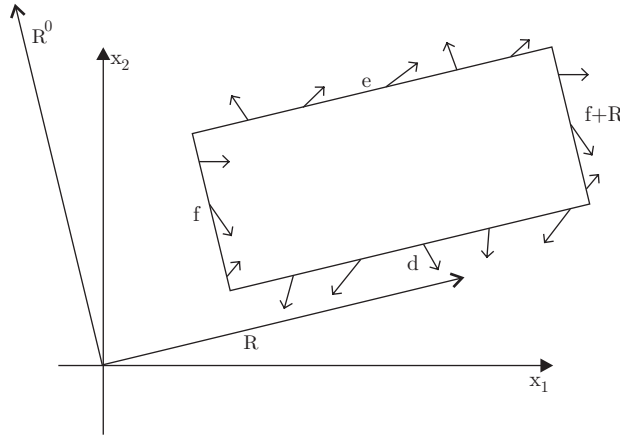


Figura 2.4:

**Dem.** Observemos que podemos supor que

$$\Sigma = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1\}, \quad R^0 = (0, 2)^*$$

Na verdade, podemos fazer uma translação, uma rotação e uma homotetia sem alterar o valor do grau. Suponhamos então que  $F$  verifica

$$F(-1, x_2) = F(1, x_2) \neq 0, \quad \forall x_2 \in [-1, 1];$$

$$F_2(x_1, 1) > 0, \quad F_2(x_1, -1) < 0, \quad \forall x_1 \in [-1, 1].$$

Consideremos a função  $F^* = F \circ J$ , onde  $J(x, y) = (-x, y)$  é uma simetria que deixa invariante o eixo das ordenadas. Consideremos a homotopia

$$H : [0, 1] \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H(\lambda, x) = \lambda F^*(x) + (1 - \lambda)F(x).$$

Utilizando as propriedades de  $F$  na fronteira de  $\Sigma$  é fácil de ver que

$$H(\lambda, x) \neq 0, \quad \forall (\lambda, x) \in [0, 1] \times \partial\Sigma,$$

pelo que  $F$  forma uma homotopia admissível; o que nos permite concluir que

$$\deg[F, \Sigma] = \deg[F^*, \Sigma]. \quad (2.13)$$

Pelos Teoremas de Weierstrass (ver [Di], pág.224) e Sard (ver [Ze], pág.318) podemos considerar uma aproximação  $F_0$  de  $F$  verificando  $F_0 \in C^1(\Sigma)$ ,  $\det F'_0(x) \neq 0$  para todo o  $x$  tal que  $F_0(x) = 0$  e

$$\sup_{x \in \partial\Sigma} |F_0 - F| < \inf_{x \in \partial\Sigma} |F|.$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \deg[F, \Sigma] &= \deg[F_0, \Sigma] = \sum_{F_0(p)=0} \text{sign } \det F'_0(p) \\ &= - \sum_{F_0^*(p)=0} \text{sign } \det (F_0^*)'(p) = -\deg[F_0^*, \Sigma] = -\deg[F^*, \Sigma], \end{aligned}$$

onde  $F_0^* = F_0 \circ J$ . O que junto com (2.13) nos permite concluir que  $\deg[F, \Sigma] = 0$ . c.q.d.

**Proposição 2.2.8.** *Suponhamos que para algum  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $b \geq 1$ , o conjunto das soluções  $(a, b)$ -periódicas de (2.2) é finito e dado por*

$$y_1, y_2, \dots, y_p,$$

(onde estamos a supor que  $y_i$  e  $y_i + kR$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é a mesma solução). Então

$$\sum_{i=1}^p \gamma_b(y_i) = 0.$$



**Dem.** Consideremos o rectângulo

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x^*R \leq \alpha + \|R\|^2 \text{ e } |x^*R^0| \leq \rho\},$$

onde  $R^0 = (-\bar{h}, 1)$ ,  $\alpha$  e  $\rho$  são constantes de tal forma que possamos supor que

$$y_i(0) \in \text{int}(\Sigma), \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Consideremos também

$$F = I - (P^b - aR) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

e vamos ver que  $F$  e  $\Sigma$  estão nas condições do lema anterior. A condição (2.10) é óbvia, dadas as condições de periodicidade da aplicação de Poincaré. Para cada  $y_0 \in \mathbb{R}^2$  tal que  $y_0^*R^0 = \rho$ , consideramos a solução  $y(t) = y(t; 0, y_0)$ . A função  $y(t)^*R^0$  verifica a equação linear

$$\phi' = -\bar{h}\phi + a(t)$$

onde  $a(t) = -\bar{h}(\bar{h}y_1(t) - H(y_1(t))) - g(t, y_1(t))$  é uma função limitada. Vamos supor que  $|a(t)| < L$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Concluimos então que

$$y(t)^*R^0 = y(0)^*R^0 e^{-\bar{h}t} + \int_0^t a(s)e^{-\bar{h}(t-s)} ds.$$

E logo

$$\begin{aligned} F(y_0)^*R^0 &= y_0^*R^0 - y(bT)^*R^0 \\ &= y_0^*R^0(1 - e^{-\bar{h}bT}) + \int_0^{bT} a(s)e^{-\bar{h}(bT-s)} ds \geq y_0^*R^0(1 - e^{-\bar{h}bT}) - bTL \end{aligned}$$

Pelo que se  $\rho = y_0^*R^0$  for suficientemente grande  $F(y_0)^*R^0 > 0$ . Concluimos que se tem (2.12). Analogamente se verifica que se  $y_0^*R^0 = -\rho$ , com  $\rho$  suficientemente grande, temos  $F(y_0)^*R^0 < 0$ ; ou seja  $F$  verifica (2.11). Aplicando agora o último lema, concluimos que  $\deg[I - (P^b - aR), \Sigma] = 0$ .

Por hipótese,

$$\text{fix}(P^b - aR) \cap \Sigma = \{y_i(0) : i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Tomemos  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  subconjuntos abertos disjuntos de  $\Sigma$  tal que

$$\bigcup_i \bar{\Omega}_i = \Sigma \quad \text{e} \quad y_i(0) \in \Omega_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

deste modo,

$$\sum_{i=1}^p \gamma_b(y_i) = \sum_{i=1}^p \deg[I - (P^b - aR), \Omega_i] = \deg[I - (P^b - aR), \Sigma] = 0,$$

como pretendido.

c.q.d.

**Lema 2.2.9.** *Suponhamos que, para algum  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $b \geq 1$ , o conjunto das soluções  $(a, b)$ -periódicas de (2.2) é finito e dado por*

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

*(onde estamos a supor que  $y_i$  e  $y_i + kR$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é a mesma solução). Se existe uma solução  $(a, b)$ -periódica inversamente instável então existe uma outra solução  $(2a, 2b)$ -periódica que não é  $(a, b)$ -periódica.*

**Dem.** Vamos supor por absurdo que toda a solução  $(2a, 2b)$ -periódica é também  $(a, b)$ -periódica, em particular é finito o número de soluções de cada um dos tipos. Podemos então aplicar o teorema anterior duas vezes e concluir que

$$\sum_{y \text{ é } (a,b)\text{-periódica}} \gamma_b(y) = 0 = \sum_{y \text{ é } (2a,2b)\text{-periódica}} \gamma_{2b}(y). \quad (2.14)$$

Como estamos a assumir que toda a solução  $(2a, 2b)$ -periódica é também  $(a, b)$ -periódica, as somas acima têm exactamente o mesmo número de elementos. Por outro lado, pelo Lema 2.2.6 as somas acima só tem 1's 0's e  $-1$ 's. Como vimos na discussão antes do Lema 2.2.5, dada uma solução  $(a, b)$ -periódica  $y$  e os multiplicadores  $\mu_1$  e  $\mu_2$  associados à equação linearizada em torno de  $y$  temos  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y)$  se  $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ ,  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < 1$ ,  $-1 < \mu_1 \leq \mu_2 < 0$ , ou se  $\mu_1, \mu_2$  são complexos conjugados. Por outro lado, se  $0 < \mu_1 < 1 = \mu_2$  o Lema 2.2.6 mostra que  $\gamma_b(y) = \gamma_{2b}(y)$ . Se  $\mu_1 = -1 < \mu_2 < 0$  temos  $\gamma_b(y) = 1$  e, de novo pelo Lema 2.2.6,  $\gamma_{2b}(y) \in \{1, 0, -1\}$ . Finalmente, se  $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$  então  $y$  é inversamente instável,  $\gamma_b = 1$  e  $\gamma_{2b} = -1$ . Concluimos que  $\gamma_b(y_i) \geq \gamma_{2b}(y_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Como existe uma solução inversamente instável (com  $\gamma_b(y) > \gamma_{2b}(y)$ ) chegamos a um absurdo com a igualdade (2.14). c.q.d.

Vamos finalmente enunciar um critério, que nos mostra que em certas situações o atractor da aplicação de Poincaré associado à equação (2.2) não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .

**Teorema 2.2.10.** *Suponhamos que para algum  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $b \geq 1$ , o conjunto das soluções  $(a, b)$ -periódicas de (2.2) é finito e dado por*

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

(onde estamos a supor que  $y_i$  e  $y_i + kR$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , é a mesma solução). Se existe uma solução  $(a, b)$ -periódica inversamente instável então  $\mathcal{A} \not\cong \mathbb{T}^1$ .

**Dem.** Seja  $y$  a solução periódica inversamente instável. Observemos que neste caso a aplicação de Poincaré associada à equação (2.2) tem um ponto periódico  $y(0) \in \mathcal{A}$  de período  $b$ . Por outro lado, pelo último lema existe uma solução  $\tilde{y}$ ,  $(2a, 2b)$ -periódica que não é  $(a, b)$ -periódica; consequentemente  $\tilde{y}(0) \in \mathcal{A}$  é um ponto periódico de período  $2b$  mas não é ponto periódico de período  $b$ . Pelo que necessariamente  $y(0)$  e  $\tilde{y}(0)$  são pontos periódicos de distinto período mínimo; o Lema 2.2.4 mostra que, neste caso, o número de rotação não está bem definido e logo  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . c.q.d.

Tal como veremos na próxima secção, se tivermos uma equação com uma solução  $(a, b)$ -periódica inversamente instável com um número infinito de soluções  $(a, b)$ -periódicas, podemos usar o Teorema de Sard-Smale para perturbar a equação e obter uma outra equação com um número finito de soluções  $(a, b)$ -periódicas em que uma delas é inversamente instável de forma a podermos aplicar o teorema acima.

Observemos que na hipótese adicional de que nenhuma das soluções

$$y_1, y_2, \dots, y_p,$$

do último teorema seja não degeneradas, a demonstração deste resultado seria bastante simplificada.

## 2.3 Uma classe de equações tal que $\mathcal{A}$ não é homeomorfo a $\mathbb{T}^1$

Vamos de seguida ver uma aplicação do Teorema 2.2.10. Para cada  $c > 0$  e  $\mathcal{H} > c^2/4$  vamos ver que existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in C(\mathbb{R}/Tk\mathbb{Z})$ ,  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ , tal que  $g'(x) < \mathcal{H}$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e de tal forma que a equação

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - cx_1 \\ x'_2 = -g(x_1) + p(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

tem um número finito de soluções  $(0, k)$ -periódicas e uma delas é inversamente instável; pelo que, neste caso,  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Observemos que uma solução  $(0, k)$ -periódica é uma solução  $kT$ -periódica de (2.15) em  $\mathbb{R}^2$ . Vamos começar por usar algumas ideias de [Or2] para construir uma equação linear que será a equação linearizada do exemplo final. Dadas  $w_1$ ,

$w_2$  e  $T$  constantes reais positivas e  $k \in \mathbb{N}$ , definimos uma função em escada da seguinte forma

$$\alpha(t) = \begin{cases} -w_1^2 + \frac{c^2}{4} & \text{se } t \in [0, \frac{kT}{2}] \\ w_2^2 + \frac{c^2}{4} & \text{se } t \in ]\frac{kT}{2}, kT] \end{cases}$$

que prolongamos por periodicidade a todo o  $\mathbb{R}$ . Vamos estudar a equação linear

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - cx_1 \\ x_2' = -\alpha(t)x_1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Observemos que embora  $\alpha$  não seja contínua, ela é mensurável. Desta forma, vamos considerar as soluções da última equação no sentido de Carathéodory i.e.  $(x_1, x_2)$  é solução sse for absolutamente contínua e verificar a equação q.t.p.. Supondo que os multiplicadores característicos desta equação são  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , a fórmula de Liouville mostra que  $\mu_1\mu_2 = e^{-ckT} > 0$ . Dada uma função  $\alpha$  nas condições acima, definimos o discriminante de (2.16) como

$$\Delta_{(2.16)}[\alpha] = \mu_1 + \mu_2 = \text{tr}\Phi(kT),$$

onde  $\Phi$  é a matriz solução de (2.16) tal que  $\Phi(0) = I_2$ .

**Lema 2.3.1.** *A equação (2.16) é inversamente instável sse*

$$\Delta_{(2.16)}[\alpha] < -(1 + e^{-ckT}).$$

**Dem.** Dado que  $\mu_1\mu_2 = e^{-ckT} > 0$ , os multiplicadores característicos são ambos positivos ou ambos negativos. A conclusão resulta agora do facto da desigualdade acima ser equivalente a

$$\mu_1 + \mu_1 + 1 + \mu_1\mu_2 < 0 \Leftrightarrow (\mu_1 + 1)(\mu_2 + 1) < 0.$$

c.q.d.

O próximo lema mostra-nos qual a relação entre  $\Delta_{(2.16)}[\alpha]$  e o discriminante de

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\left(\alpha(t) - \frac{c^2}{4}\right)x_1 \end{cases}, \quad (2.17)$$

que denotamos por  $\Delta_{(2.17)}[\alpha]$ .

**Lema 2.3.2.**  $\Delta_{(2.17)}[\alpha] = e^{\frac{c}{2}kT} \Delta_{(2.16)}[\alpha]$ .

**Dem.** Observemos que se  $\mu$  é um multiplicador característico de (2.16) então existe uma solução  $x = (x_1, x_2)$  desta equação que verifica

$$x(t + kT) = \mu x(t).$$

Assim,

$$y_1 = e^{\frac{c}{2}t} x_1, \quad y_2 = y_1'$$

verifica a equação (2.17) e é tal que

$$y_1(t + kT) = e^{\frac{c}{2}t} e^{\frac{c}{2}kT} \mu x_1(t) = e^{\frac{c}{2}kT} \mu y_1(t)$$

e

$$y_2(t + kT) = e^{\frac{c}{2}kT} \mu y_1'(t) = e^{\frac{c}{2}kT} \mu y_2(t);$$

ou seja,  $e^{\frac{c}{2}kT} \mu$  é multiplicador característico de (2.17). Logo o resultado. c.q.d.

**Lema 2.3.3.** *A equação (2.16) é inversamente instável sse*

$$\Delta_{(2.17)}[\alpha] < -2 \cosh\left(\frac{ckT}{2}\right).$$

**Dem.** De facto, pelos lemas anteriores, (2.16) é inversamente instável sse

$$\Delta_{(2.17)}[\alpha] < -e^{\frac{c}{2}kT} (1 + e^{-ckT}) = -2 \cosh\left(\frac{ckT}{2}\right).$$

c.q.d.

Interessa-nos calcular o discriminante de (2.17) em função de  $w_1$ ,  $w_2$  e  $T$ .

**Lema 2.3.4.** *O valor de  $\Delta_{(2.17)}[\alpha]$  é dado por*

$$2 \cosh\left(\frac{w_1 kT}{2}\right) \cos\left(\frac{w_2 kT}{2}\right) + \sinh\left(\frac{w_1 kT}{2}\right) \sin\left(\frac{w_2 kT}{2}\right) \left(\frac{w_1}{w_2} - \frac{w_2}{w_1}\right).$$

**Dem.** Observemos que a equação (2.17) se pode escrever como  $x' = A(t)x$ , onde

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ w_1^2 & 0 \end{pmatrix} = A_1 & \text{se } t \in [0, k\frac{T}{2}] \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_2^2 & 0 \end{pmatrix} = A_2 & \text{se } t \in ]\frac{kT}{2}, kT] \end{cases}$$

que se prolonga por periodicidade a todo o  $\mathbb{R}$ . A função matricial

$$\Phi(t) = e^{A_1 t} = \begin{pmatrix} \cosh(w_1 t) & \frac{\sinh(w_1 t)}{w_1} \\ w_1 \sinh(w_1 t) & \cosh(w_1 t) \end{pmatrix}$$

é a solução de (2.17) em  $[0, \frac{kT}{2}]$  que verifica  $\Phi(0) = I_2$ . Se  $t \in [\frac{kT}{2}, kT]$ ,

$$\Phi(t) = e^{A_2(t - \frac{kT}{2})} e^{A_1 \frac{kT}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(w_2(t - \frac{kT}{2})) & \frac{\sin(w_2(t - \frac{kT}{2}))}{w_2} \\ -w_2 \sin(w_2(t - \frac{kT}{2})) & \cos(w_2(t - \frac{kT}{2})) \end{pmatrix} e^{A_1 \frac{kT}{2}}$$

é a solução de (2.17) que verifica  $\Phi(kT/2) = e^{A_1 kT/2}$ . Finalmente

$$\Delta_{(2.17)}[\alpha] = \text{tr}(e^{A_2 \frac{kT}{2}} e^{A_1 \frac{kT}{2}}).$$

c.q.d.

O cálculo apresentado no último lema é clássico, veja-se [MaWi].

**Lema 2.3.5.** *Dado  $\mathcal{H} > c^2/4$  existe  $w_1$ ,  $w_2$  e  $k$  tal que a equação (2.16) é inversamente instável e  $\alpha(t) < \mathcal{H}$ .*

**Dem.** Escolhemos  $w_2$  de tal forma que

$$\frac{w_2 kT}{2} = \pi.$$

Deste modo, o último lema mostra-nos que

$$\Delta_{(2.17)}[\alpha] = -2 \cosh\left(\frac{w_1 kT}{2}\right).$$

Pelo que, do Lema 2.3.3 sai que (2.16) é inversamente instável sse

$$-2 \cosh\left(\frac{w_1 kT}{2}\right) < -2 \cosh\left(\frac{ckT}{2}\right) \Leftrightarrow w_1 > c;$$

escolhemos então um  $w_1$  qualquer maior do que  $c$ . Finalmente escolhemos  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de modo a que  $w_2^2 < \mathcal{H} - c^2/4$ ; assim

$$\alpha(t) \leq w_2^2 + \frac{c^2}{4} < \mathcal{H},$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

c.q.d.

O nosso objectivo é definir  $g$  e uma solução  $x$  de (2.15) de forma a que  $g'(x(t)) = \alpha(t)$ ; contudo a função  $\alpha$  até agora encontrada não nos dá uma função  $g$  continuamente diferenciável. O próximo lema, que foi provado em [Or3], permite-nos regularizar  $\alpha$  e ainda assim obter uma equação inversamente instável. Seja  $L^\infty(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  o subespaço das funções  $kT$ -periódicas de  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Dada uma matriz  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  definimos a norma

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Observemos que se  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  então  $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ .

**Lema 2.3.6.** *Seja  $\{\alpha_n\}$  uma sucessão limitada em  $L^\infty(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  a convergir para  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$  na topologia fraca\*, ou seja*

$$\int_0^T \alpha_n(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \alpha(t) \varphi(t) dt,$$

para todo o  $\varphi \in L^1(0, T)$ . Então

$$\lim \Delta_{(2.16)}[\alpha_n] = \Delta_{(2.16)}[\alpha].$$

**Dem.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja  $x_n \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  a solução da equação integral

$$x_n(t) = I_2 + \int_0^t A_n(s) x_n(s) ds,$$

onde

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -\alpha_n(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretendemos mostrar que  $x_n$  tende uniformemente em  $[0, T]$  para a solução de

$$x(t) = I_2 + \int_0^t A(s) x(s) ds, \quad (2.18)$$

onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -c & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se  $W$  for uma constante real tal que  $\|A_n(t)\|_\infty < W$ , temos

$$\|x_n(t)\|_\infty \leq 1 + 2W \int_0^t \|x_n(t)\|_\infty dt, \quad t \in [0, T],$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Pelo Lema de Gronwall concluímos que  $\|x_n(t)\|_\infty \leq e^{2Wt}$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , pelo que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada em  $[0, T]$ . Dados  $t_1, t_2 \in [0, T]$  temos

$$\|x_n(t_1) - x_n(t_2)\|_\infty \leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} A_n(t)x_n(t)dt \right\|_\infty \leq 2We^{2WT}|t_1 - t_2|;$$

concluímos que  $x_n$  é equicontinua. O Teorema de Ascoli-Arzelà (ver [Har], pág.4) garante-nos que existe pelo menos uma subsucessão que converge uniformemente.

Suponhamos agora que  $x_n$  é uma subsucessão qualquer a convergir uniformemente para  $y$ . Seja  $\varphi \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  uma função matricial arbitrária com entradas em  $L^1(0, T)$ . Obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^T A_n(t)x_n(t)\varphi(t)dt - \int_0^T A(t)y(t)\varphi(t)dt \right\|_\infty \\ & \leq \left\| \int_0^T A_n(t)(x_n(t) - y(t))\varphi(t)dt \right\|_\infty + \left\| \int_0^T (A_n(t) - A(t))y(t)\varphi(t)dt \right\|_\infty \\ & \leq 4W \max_{t \in [0, T]} \|x_n(t) - y(t)\|_\infty \int_0^T \|\varphi(t)\|_\infty dt + \max_{i=1,2} \left| \int_0^T (\alpha_n(t) - \alpha(t))(y(t)\varphi(t))_{1,i} dt \right|, \end{aligned}$$

que tende para 0 quando  $n \rightarrow +\infty$ . Em particular

$$x_n(t) = I_2 + \int_0^t A_n(t)x_n(t)dt \rightarrow I_2 + \int_0^t A(t)y(t)dt$$

pontualmente; concluímos que  $y$  é solução de (2.18).

Do que vimos até aqui é agora possível deduzir que  $x_n$  converge uniformemente para a solução  $x$  de (2.18). Em particular  $x_n(T) \rightarrow x(T)$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e consequentemente

$$\lim \Delta_{(2.16)}[\alpha_n] = \lim \text{tr } x_n(T) = \text{tr } x(T) = \Delta_{(2.16)}[\alpha].$$

c.q.d.

Definimos a convolução

$$\alpha_n(t) = (\rho_n * \alpha)(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t - y)\alpha(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t - y)\rho_n(y)dy,$$

onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$  é uma função com suporte contido no intervalo  $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ,  $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)dt = 1$  e  $\rho_n \geq 0$ . É bem sabido que  $\alpha_n \in$



$C^\infty(\mathbb{R})$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, dado que  $\alpha$  é  $kT$ -periódica, observamos que  $\alpha_n$  é ainda  $kT$ -periódica. Vamos ver agora que  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  na topologia fraca\*. De facto, dada  $\varphi \in L^1(0, T)$  arbitrária, dada a forma de  $\alpha$ ,  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  pontualmente q.t.p. e consequentemente,  $\alpha_n \varphi \rightarrow \alpha \varphi$  pontualmente q.t.p.. Por outro lado,  $|\alpha_n \varphi| \leq (w_2^2 + \frac{c^2}{2})|\varphi| \in L^1(0, T)$ . Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue temos

$$\int_0^T \alpha_n(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_0^T \alpha(t) \varphi(t) dt,$$

como pretendido. Dado  $\mathcal{H} > \frac{c^2}{4}$ , pelos lemas anteriores podemos agora fixar uma função  $\alpha_0 = \alpha_{n_0} \in C^\infty(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ , para  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, tal que  $\alpha < \mathcal{H}$  e tal que a equação

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 - cx_1 \\ x'_2 = -\alpha_0(t)x_1 \end{cases} \quad (2.19)$$

é inversamente instável. Observemos ainda que esta nova  $\alpha$  tem uma forma semelhante à antiga; em particular  $\alpha(t) = -\omega_1^2 + c^2/4$  se  $t \in (0 + 1/n, kT/2 - 1/n)$  e  $\alpha(t) = \omega_2^2 + c^2/4$  se  $t \in (kT/2 + 1/n, kT - 1/n)$ .

**Lema 2.3.7.** *Dado  $\mathcal{H} > c^2/4$  existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \in C^\infty(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  tal que  $g' < \mathcal{H}$  e a equação (2.15) tem uma solução  $x$   $(0, k)$ -periódica cuja equação linearizada é inversamente instável.*

**Dem.** Consideremos a função  $\alpha_0$  definida antes. Consideremos constantes  $A, B \in \mathbb{R}$  tal que  $A < \alpha_0(t) < B < \mathcal{H}$ . Vamos fixar uma função  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  de tal forma que exista um intervalo  $I \subset [0, 1]$  tal que  $g'' > 0$  em  $I$  e  $g'(I) = [A, B]$  (ver Figura 2.5). Definimos agora a função  $kT$ -periódica

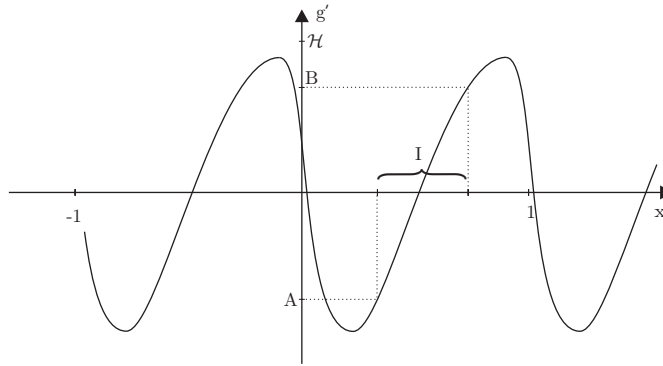


Figura 2.5:

$x_1(t) = (g'_{/I})^{-1}(\alpha_0(t))$  e a função  $kT$ -periódica  $p(t) = x_1''(t) + cx_1'(t) + g(x_1(t))$ . Deste modo  $x = (x_1, x_1' + cx_1)^*$  é solução  $(0, k)$ -periódica de (2.15), e a equação linearizada em torno de  $x$  é a equação (2.19) que por construção é inversamente instável. c.q.d.

Até agora encontramos uma equação do tipo de (2.15) com uma solução  $(0, k)$ -periódica cuja equação linearizada é inversamente instável. Se esta solução for isolada então ela é inversamente instável. Para podermos aplicar o Teorema 2.2.10 temos de resolver o problema da existência de um número finito de soluções  $(0, k)$ -periódicas, não degeneradas. O lema seguinte mostra-nos que é suficiente excluir a existência de soluções  $(0, k)$ -periódicas degeneradas.

**Lema 2.3.8.** *Suponhamos que existe um número infinito de soluções  $(0, k)$ -periódicas de (2.15) (onde estamos a supor que a solução  $x$  e  $x + iR$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , são a mesma solução), então existe uma solução  $(0, k)$ -periódica degenerada.*

**Dem.** Suponhamos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de soluções  $(0, k)$ -periódicas de (2.15). Vamos supor, sem perda de generalidade, que

$$0 < x_n(0)^* R \leq \|R\|^2,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que a aplicação de Poincaré é dissipativa, podemos supor a existência de um compacto  $E \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $x_n(0) \in E$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos supor a existência de uma subsucessão  $(x_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  convergente para  $x \in E$ . Deste modo obtivemos uma sucessão de zeros de  $I - P^k$  convergindo para  $x$  (consequentemente  $x$  também é um zero de  $I - P^k$ ). Se por absurdo  $x$  não for degenerado, podemos aplicar o teorema da função inversa (ver [Di], pág.166) e concluir que  $I - P^k$  é localmente invertível o que é um absurdo. c.q.d.

Vamos ver de seguida, como consequência do Teorema de Sard-Smale, que o conjunto das forças  $p$  para as quais a equação (2.15) não tem soluções  $(0, k)$ -periódicas degeneradas é denso em  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ .

Dados  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, um operador continuamente diferenciável  $\Phi : U \subset X \rightarrow Y$ , definido num conjunto aberto e conexo  $U$ , é de Fredholm se  $\dim(\text{Ker}(\Phi'(u)))$  e  $\text{codim}(\text{Rank}(\Phi'(u)))$  forem finitas para cada  $u \in X$ . Chamamos índice de  $\Phi$  ao valor

$$\text{ind}(\Phi) = \dim(\text{Ker}(\Phi'(u))) - \text{codim}(\text{Rank}(\Phi'(u))),$$

que é o mesmo para cada  $u \in U$  (ver [Ze], pág.317). Diremos que  $y \in U$  é um ponto regular de  $\Phi$  se  $\Phi'(y)$  for sobrejectiva. Diremos ainda que  $y \in Y$  é um valor regular de  $\Phi$  se  $\Phi^{-1}(y)$  é vazio ou constituído por pontos regulares.

**Teorema 2.3.9** (Sard-Smale). *Suponhamos que  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach separáveis (i.e. têm um subconjunto denso e contável) e  $\Phi : U \subset X \rightarrow Y$  é um operador de Fredholm de classe  $C^k$  com  $k > \max\{0, \text{ind}(\Phi)\}$ . Então o conjunto dos valores regulares de  $\Phi$  é residual em  $Y$  (i.e. contém a intersecção de uma família de conjuntos abertos e densos em  $Y$ ); em particular é denso em  $Y$ .*

**Dem.** Ver [AbMaRa], pág. 227.

Para cada  $j \in \mathbb{N}$  consideremos o espaço de Banach  $C^j(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  das funções  $kT$ -periódicas em  $C^j(\mathbb{R})$ , com a norma

$$\|u\|_{C^j} = \sum_{i=0}^j \sup_{t \in [0, kT]} |u^{(i)}(t)|.$$

**Lema 2.3.10.** *Se  $g \in C^1(\mathbb{R})$  e  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  então  $g$  é uniformemente diferenciável em  $[a, b]$ , i.e. para todo o  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $|h| < \delta$  e  $h \neq 0$  temos*

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| < \epsilon$$

para todo o  $x \in [a, b]$ .

**Dem.** A função  $g'$  é uniformemente contínua em  $[a-1, b+1]$ , i.e. dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |g'(x) - g'(y)| < \epsilon$$

para todo o  $x, y \in [a-1, b+1]$ . Dado então  $\epsilon > 0$  seja  $0 < \delta < 1$  tal que a expressão acima seja válida. Se  $|h| < \delta < 1$ ,  $h \neq 0$  e  $x \in [a, b]$ , temos

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| = |g'(c) - g'(x)| < \epsilon,$$

onde  $c \in [a-1, b+1]$ .

c.q.d.

**Lema 2.3.11.** Dada  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , o operador

$$\Phi : C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$$

$$\Phi(x) = x'' + cx' + g(x)$$

é de classe  $C^1$  e de Fredholm com índice zero.

**Dem.** A primeira parte do funcional é linear e contínuo, pelo que não apresenta dificuldade o cálculo da derivada. Fixemos  $u \in C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ , vamos ver que  $\Psi(u) = g(u)$  é derivável Fréchet em  $u$  e

$$\Psi' : C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$$

$$\Psi'(u)(h) = g'(u)h.$$

De facto, para cada  $h \in C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  temos

$$\Psi(u+h) - \Psi(u) - g'(u)h = g(u+h) - g(u) - g'(u)h.$$

Como  $u$  toma valores num compacto, podemos usar o último lema e concluir que para todo o  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $\|h\|_{C^2} < \delta$  e  $h \neq 0$  temos

$$\frac{\|\Psi(u+h) - \Psi(u) - g'(u)h\|_{C^0}}{\|h\|_{C^2}} < \epsilon \frac{\|h\|_{C^0}}{\|h\|_{C^2}} < \epsilon.$$

Pelo que  $\Phi$  é derivável Fréchet em  $u$  e

$$\Phi'(u)(h) = h'' + ch' + g'(u)h.$$

Se  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão de funções a convergir para  $u$  em  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ , temos

$$\begin{aligned} \|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\| &= \sup_{\|h\|_{C^2} \leq 1} \|(g'(u_n) - g'(u))h\|_{\infty} \\ &\leq \|g'(u_n) - g'(u)\|_{\infty} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . Concluimos que  $\Phi$  é de classe  $C^1$ .

Vamos de seguida ver que podemos decompor  $\Phi'(u) = S + T$  na soma de um operador  $S(h) = h''$  de Fredholm com índice zero com um funcional compacto. Deste modo podemos concluir que  $\Phi$  é uma perturbação compacta de  $S$  e logo também é de Fredholm com índice zero (ver [Ze], pág.296). O operador  $S$  é obviamente contínuo e o núcleo é constituído pelas constantes de  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  logo tem dimensão 1. Por outro lado

$$\text{Rank}(S) = \left\{ h \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) : \int_0^{kT} h(t)dt = 0 \right\},$$

ou seja  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) = \mathbb{R} \oplus \text{Rank}(S)$  logo  $\text{codim Rank}(S) = 1$ . Vejamos agora que o operador  $T(h) = ch' + g'(u)h$  é compacto. De facto, se  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão limitada em  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  então a sucessão  $(T(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$  é uniformemente limitada e equicontinua. O Teorema de Ascoli-Arzelà permitem-nos concluir que existe uma subsucessão de  $(T(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergente em  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ . c.q.d.

Em [AbMaRa], pag.101, pode ser visto um estudo mais geral da diferenciabilidade de operadores do tipo de  $\Phi$ .

Seja

$A = \{p \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) : (2.15) \text{ tem uma solução } (0, k)\text{-periódica degenerada}\}.$

**Lema 2.3.12.** *O conjunto  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) \setminus A$  é denso em  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ .*

**Dem.** Consideremos a função  $\Phi$  do último lema. Uma função  $p \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  é um valor regular de  $\Phi$  sse todas as soluções  $u$  de

$$x'' + cx' + g(x) = p(t), \quad (2.20)$$

em  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  são tais que a função  $\Phi'(u)$  é bijectiva (visto que  $\text{ind}(\Phi) = 0$ ). Por outro lado,  $p \in A$  sse existe uma solução de (2.20) em  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  tal que 1 é multiplicador característico de

$$\begin{cases} \xi' = \eta - c\xi \\ \eta' = -g'(u_1)\xi \end{cases}.$$

O que ainda é equivalente à existência de uma solução periódica  $(\xi, \eta)$  não trivial da última equação. Ou seja,  $\Phi'(u_1)(\xi) = \Phi'(u_1)(0)$  e  $\Phi'(u_1)$  não é injectiva. Como  $\Phi(u_1) = p$ ,  $p$  não é um valor regular de  $\Phi$ . Até agora mostrámos que

$$\{p \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) : p \text{ é um valor regular de } \Phi\} = C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}) \setminus A.$$

Uma aplicação do último lema junto com o Teorema de Sard-Smale dá-nos o resultado. c.q.d.

Finalmente estamos em condições de apresentar o resultado final.

**Teorema 2.3.13.** *Dado  $\mathcal{H} > c^2/4$  existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  tal que  $g' < \mathcal{H}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  tal que a equação (2.15) tem um número finito de soluções  $(0, k)$ -periódicas e uma delas é tal que a equação linearizada em torno dela é inversamente instável.*

**Dem.** Consideremos  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  tal que  $g' < \mathcal{H}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p \in C^\infty(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  e a solução  $(0, k)$ -periódica dadas pelo Lema 2.3.7. Temos  $\Phi(x_1(t)) = p(t)$ . Como a equação linearizada

$$\begin{cases} \xi' = \eta - c\xi \\ \eta' = -g'(x_1)\xi \end{cases} ,$$

é inversamente instável, não tem soluções  $kT$ -periódicas não triviais. O mesmo se passa com a equação

$$h'' + ch' + g'(x_1(t))h = 0.$$

Dado que, pelo Lema 2.3.11,  $\text{ind}(\Phi'(x_1)) = 0$ , a equação

$$h'' + ch' + g'(x_1(t))h = b(t)$$

tem uma única solução  $kT$ -periódica para cada  $b \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ , ou seja  $\Phi'(x_1)$  é um isomorfismo. Aplicando o teorema da função inversa, concluímos que  $\Phi$  é um homeomorfismo na vizinhança de  $x_1$ . Pelo Lema 2.3.12 podemos considerar uma sucessão  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a convergir para  $p$  em  $C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  de tal forma que a equação

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - cx_1 \\ x_2' = -g(x_1(t)) + p_n(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

não tenha soluções  $(0, k)$ -periódicas degeneradas. Pelo que vimos acima, para  $n$  suficientemente grande, está bem definida  $(x_1)_n = \Phi^{-1}(p_n)$  e  $(x_1)_n \rightarrow x_1$  em  $C^2(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  a função  $z_n = ((x_1)_n, (x_1)'_n + c(x_1)_n)^*$  é uma solução  $(0, k)$ -periódica de (2.21) com equação linearizada

$$\begin{cases} \xi' = \eta - c\xi \\ \eta' = -g'((x_1)_n(t))\xi \end{cases} .$$

Como  $g((x_1)_n) \rightarrow g(x_1)$  na topologia fraca\*, o Lema 2.3.6 mostra que para  $n = n_0$  suficientemente grande a equação anterior é inversamente instável. Logo a função  $((x_1)_{n_0}, (x_1)'_{n_0} + c(x_1)_{n_0})^*$  é uma solução  $(0, k)$ -periódica de (2.21) cuja equação linearizada é inversamente instável. Dado que a equação (2.21) não tem soluções  $(0, k)$ -periódicas degeneradas, concluímos, pelo Lema 2.3.8, que tem um número finito de soluções  $(0, k)$ -periódicas. O teorema fica então provado com  $p = p_{n_0}$ . c.q.d.

**Corolário 2.3.14.** *Dado  $\mathcal{H} > c^2/4$  existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  tal que  $g' < \mathcal{H}$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \in C(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z})$  tal que o atrator associado à equação (2.15) não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** É consequência imediata do último teorema e do Teorema 2.2.10. c.q.d.

Vamos ainda mostrar que o resultado do Teorema 2.3.13 é robusto, ou seja, se existe um número finito de soluções não degeneradas e uma delas é tal que a equação linearizada em torno dela é inversamente instável e perturbarmos um pouco a equação (2.2), num sentido a definir futuramente, continuamos a ter um número finito de soluções não degeneradas onde uma delas é tal que a equação linearizada em torno dela é inversamente instável. Mais concretamente, consideremos o espaço  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  das funções contínuas e 1-periódicas, com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|.$$

Seja  $C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  o espaço das funções  $T$ -periódicas na primeira variável, 1-periódicas na segunda, contínuas e tal que existe e é contínua a derivada parcial em ordem à segunda variável. Consideremos ainda a norma

$$\|g\|_{C^{0,1}} = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} |g(t,x)| + \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \right|.$$

Finalmente consideremos o espaço produto

$$X = C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

com a norma produto  $\|\cdot\|_X$ . Desta forma,  $X$  é um espaço de Banach.

Fixemos uma equação do tipo de (2.2)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - H^*(y_1) \\ y_2' = -g^*(t, y_1) \end{cases}, \quad (2.22)$$

onde  $(h^*, g^*) \in X$ ,  $H^*(x) = \int_0^x h^*(t)dt$  e  $0 < c = \min h^*$  vamos supor que para algum  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ,  $b \geq 1$ , a equação anterior tem um número finito de soluções  $(a, b)$ -periódicas

$$y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*,$$

não degeneradas e uma delas é tal que a equação linearizada em torno dela é inversamente instável. É válida a seguinte proposição:

**Proposição 2.3.15.** *Existe uma vizinhança  $U$  de  $(h^*, g^*)$  em  $X$  tal que se  $(h, g) \in U$  então a equação (2.2) tem  $p$  soluções  $(a, b)$ -periódicas, todas elas não degeneradas e uma delas é tal que a equação linearizada em torno dela é inversamente instável.*

**Dem.** Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $y_i^*(0) \in S_0$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $S_0$  definido no início do primeiro capítulo). Consideremos o operador

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \times X \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, h, g) \rightarrow [I - (P^b - aR)](x),$$

onde  $P$  é a aplicação de Poincaré. Este operador é de classe  $C^1$  (ver Proposição 4.3.6 do Apêndice 1) e além disso

$$\Psi(x, h^*, g^*) = 0 \text{ e } x \in S_0 \Leftrightarrow x \in \{y_1^*(0), \dots, y_p^*(0)\}.$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, p\}$ , consideremos  $y(t; 0, y_0)$  a solução geral de (2.22) e

$$Y_i(t) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t; 0, y_i^*)$$

a matriz solução da equação linearizada de (2.22) em torno de  $y_i^*$ . Temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(y_i^*(0), h^*, g^*) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.23)$$

$$x \rightarrow [I - Y_i(bT)]x.$$

Como por hipótese  $y_i^*$  é não degenerada, os valores próprios de  $I - Y_i(bT)$  são  $1 - \mu_1$  e  $1 - \mu_2$ , ambos diferentes de zero; pelo que (2.23) é um isomorfismo. Concluimos, pelo teorema das funções implícitas, (ver [Ze], pág.250) que existe  $V_i \subset \mathbb{R}^2$  vizinhança de  $y_i^*(0)$ ,  $U_i \subset X$  vizinhança de  $(h^*, g^*)$  e uma função  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  tal que

$$\Psi(x, h, g) = 0 \text{ e } (x, h, g) \in V_i \times U_i \Leftrightarrow f_i(h, g) = x. \quad (2.24)$$

Desta forma, para cada

$$(h, g) \in \bigcap_{i=1, \dots, p} U_i$$

a equação (2.2) têm pelo menos  $p$  soluções  $(a, b)$ -periódicas, cada vizinhança  $V_i$  tem uma condição inicial correspondente a uma destas soluções. Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe uma sucessão  $(h_n, g_n)$  de elementos em  $X$  a convergir para  $(h^*, g^*)$  em  $X$  e de tal forma que (2.2) tem pelo menos  $p + 1$  soluções  $(a, b)$ -periódicas. Supondo que  $(h_n, g_n) \in \bigcap_i U_i$ ,



podemos tomar uma sucessão  $y_n^0 \in S_0$  tal que  $\Psi(y_n^0, h_n, g_n) = 0$  e  $y_n^0 \notin \{f_1(h_n, g_n), \dots, f_p(h_n, g_n)\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Usando um argumento semelhante ao usado na demonstração do Lema 2.2.8 podemos demonstrar que a sucessão de condições iniciais  $y_n^0 \in S_0$  está dentro de um compacto, logo  $y_n^0$  é uma sucessão limitada, podemos supor que uma sua subsucessão  $y_{n_k}^0$  converge para  $y_0$ . Temos então

$$0 = \Psi(y_{n_k}^0, h_{n_k}, g_{n_k}) \rightarrow \Psi(y_0, h^*, g^*) = 0.$$

Pelo que  $y_0 = y_i^*(0)$  para algum  $i \in \{1, \dots, p\}$ , concluímos que  $y_{n_k}^0 \in V_i$  para  $n_k$  grande; o que dá uma contradição com (2.24). Provámos até agora que existe uma vizinhança  $U_0$  de  $(h^*, g^*)$  em  $X$  tal que se  $(h, g) \in U_0$  então a equação (2.2) tem exactamente  $p$  soluções  $(a, b)$ -periódicas com condições iniciais

$$\{f_1(h, g), \dots, f_p(h, g)\}.$$

Suponhamos, de novo por absurdo, que existe uma sucessão  $(h_n, g_n)$  de elementos em  $X$  a convergir para  $(h^*, g^*)$  em  $X$  e de tal forma que (2.2) tem pelo menos uma solução degenerada  $y_n$ . Podemos ainda supor, sem perda de generalidade, que  $y_n(0) \in V_i$  para todo o  $n \in \mathbb{N}$  e algum  $i \in \{1, \dots, p\}$  fixo. Dado que  $y_n(0) = g_i(h_n, g_n)$  temos  $y_n(0) \rightarrow y_i(0)$ . Como estamos a assumir que  $y_n$  é degenerada podemos concluir da existência de uma sucessão  $v_n$  de vectores em  $\mathbb{R}^2$  de norma unitária e tal que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(y_n(0), h_n, g_n)(v_n) = 0.$$

Assumindo que  $v_n \rightarrow v$  e recordando que  $\Psi$  é de classe  $C^1$ , obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(y_i(0), h^*, g^*)(v) = 0,$$

o que é um absurdo porque  $y_i$  não é degenerada.

Vamos supor agora que a equação linearizada de (2.22) em torno de  $y_1^*$

$$\begin{cases} \xi' = \eta - h^*(y_1^*)\xi \\ \eta' = -\frac{\partial g^*}{\partial x}(t, y_1^*(t))\xi \end{cases} \quad (2.25)$$

é inversamente instável i.e. a solução  $Y^*$  desta equação tal que  $Y^*(0) = I_2$  é tal que os valores próprios  $\mu_1, \mu_2$  de  $Y^*(bT)$  verificam  $\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0$ . Se  $(h_n, g_n)$  converge para  $(h^*, g^*)$  em  $X$  então, pelo que vimos anteriormente, a equação

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - H_n(y_1) \\ y_2' = -g_n(t, y_1) \end{cases}$$

tem uma solução  $y_n$   $(a, b)$ -periódica tal que  $y_n(0) \rightarrow y_1^*(0)$ . Pela Proposição 4.3.6 do Apêndice 1, as componentes de  $Y_n(bT)$ , onde  $Y_n$  é a solução da equação linearizada em torno de  $y_n$  que verifica  $Y_n(0) = I_2$ , convergem para as componentes de  $Y^*(bT)$ . Concluimos que os valores próprios de  $Y_n(bT)$  (raízes do polinómio característico) convergem para os valores próprios de  $Y^*(bT)$ ; pelo que se  $n$  for suficientemente grande,  $y_n$  é inversamente instável. c.q.d.

## 2.4 Um contra-exemplo autónomo

O estudo feito na última secção mostra, em particular, que não é possível melhorar a desigualdade no Teorema 2.1.3. Todavia, é possível observar este facto a partir de uma classe de equações autónomas.

No início da década de trinta, F. Tricomi [Tr1] [Tr2] estudava uma equação do tipo

$$x'' + cx' + \sin x = \beta, \quad (2.26)$$

onde  $c$  e  $\beta$  são constantes positivas. A sua motivação eram as aplicações desta equação aos motores eléctricos. Observemos que esta é também a equação do pêndulo forçado por um torque constante. F. Tricomi mostrou que quando  $\beta > 1$  não existem equilíbrios e existe uma solução periódica rotativa i.e. uma solução  $x$  de (2.26) tal que  $x(t + \tau) = x(t) + 2\pi$ , para algum  $\tau > 0$ . Provou além disso que  $x$  atrai todas as outras soluções. Por outro lado, quando  $\beta < 1$  este autor mostrou a existência de dois equilíbrios e de uma constante  $c_0(\beta)$  tal que se  $0 < c < c_0(\beta)$ , existe uma solução periódica rotativa, porém, quando o parâmetro  $c$  se move para valores acima de  $c_0(\beta)$ , a solução periódica rotativa é destruída numa bifurcação de homoclinicas. Ambas as situações estão esboçadas na Figura 2.6; em ambos os casos os pontos de equilíbrio estáveis estão representados como espirais embora sejam nodos estáveis para alguns valores de  $c$ . Atendendo aos resultados de F. Tricomi (ver também [HoLeMi]), podemos construir o diagrama de bifurcação que esboçamos na Figura 2.7. Dado que a equação (2.26) não depende do tempo, podemos considerá-la  $T$ -periódica de um qualquer período  $T > 0$  e considerar a correspondente aplicação de Poincaré. Nesta secção vamos considerar a equação associada a (2.26)

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -cv - \sin x + \beta \end{cases}, \quad (2.27)$$

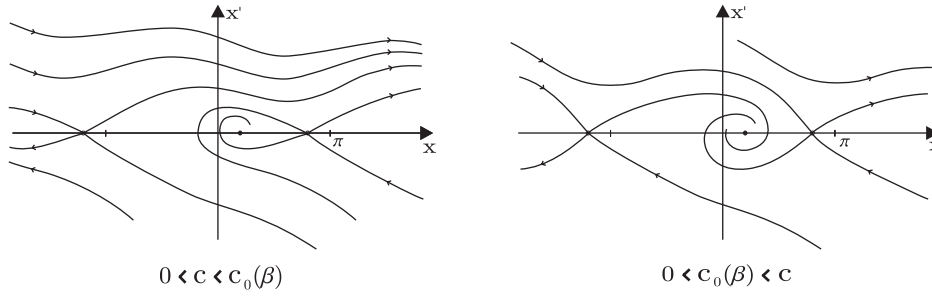


Figura 2.6:

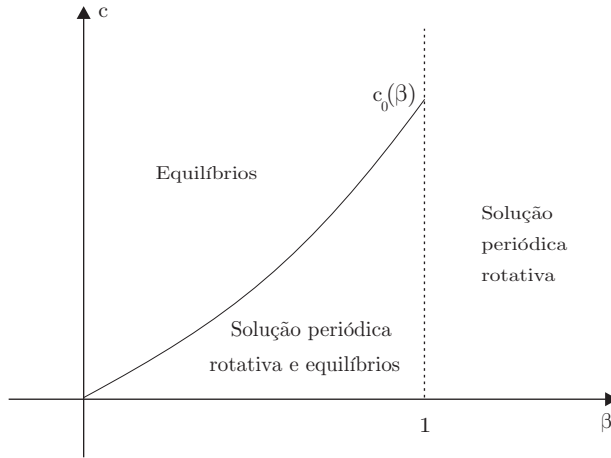


Figura 2.7:

que é do tipo de (1.1) com  $R = (1, 0)^*$ . Observemos que se  $(x, v)^*$  for solução da equação acima então  $(x, v + cx)^*$  é solução da equação

$$\begin{cases} x' = v - cx \\ v' = -\sin x + \beta \end{cases} \quad (2.28)$$

Desta forma, o espaço de fases de (2.28) é a imagem do espaço de fases de (2.27) por uma transformação linear. Como vimos na Secção 1 deste Capítulo, a aplicação de Poincaré associada a (2.28) é dissipativa, podemos agora concluir que o mesmo se passa com (2.27). Da mesma forma, o atrator  $\mathcal{A}$  associado a (2.27) é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  sse o atrator associado a (2.28) tiver a mesma propriedade.

Atendendo à caracterização de  $\mathcal{A}$  dada pelo Lema 1.4.1, e atendendo à Figura 2.6 concluímos que quando  $0 < c < c_0(\beta)$  o atrator é formado pelos equilíbrios, pela solução periódica rotativa e pelas heteroclínicas que

juntam estas órbitas; pelo que, neste caso  $\mathcal{A}$  não é obviamente homeomorfo ao círculo. Podemos então deduzir pelo Teorema 2.1.3 que  $c_0(\beta) < 2$  para todo o  $\beta \in ]0, 1[$ . Na verdade esta é uma estimativa muito grosseira para  $c_0(\beta)$ ; estimativas mais finas foram encontradas por F. Tricomi (ver [SaCo] para uma descrição das estimativas para  $c_0(\beta)$ ). As estimativas obtidas mostram que  $c_0(\beta) < \sqrt{2}$ . Vamos ver nesta secção que se considerarmos uma equação do mesmo tipo

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -cv - g(x) + \beta \end{cases} \quad , \quad (2.29)$$

onde a função seno foi substituída pela função  $2\pi$ -periódica definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ -x + \pi & \text{se } x \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

então vamos ter uma situação análoga à anterior e além disso vamos mostrar que neste caso se  $\beta$  toma valores arbitrariamente perto de  $\pi/2$ , a função  $c_0(\beta)$  toma valores arbitrariamente perto de 2.

Diremos que uma solução  $(x, v)$  de (2.29) é periódica rotativa se  $x(t+\tau) = x(t) + 2\pi$  para algum  $\tau > 0$ . Mais concretamente, vamos mostrar que fixado  $c$  de forma a que  $c^2/4 < 1 \Leftrightarrow c < 2$ , podemos escolher  $\beta \in ]0, \pi/2[$  de forma a que a equação (2.29) tem equilíbrios e simultaneamente uma solução periódica rotativa, pelo que o atractor associado não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Dado que 1 é a constante de Lipschitz de  $g$ , isto mostra que a desigualdade do Teorema 2.1.3 é optimal.

Dado que  $f$  é Lipschitziana, a equação (2.29) tem existência e unicidade de solução para cada conjunto de condições iniciais. Dado  $\beta \in ]0, \pi/2[$ , a equação (2.29) tem pontos de equilíbrio em  $(\beta + 2k\pi, 0)^*$  e  $(-\pi - \beta + 2k\pi, 0)^*$  para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . O estudo da linearização de (2.29) em torno destes pontos mostra que os pontos da forma  $(\beta + 2k\pi, 0)^*$  são focos estáveis e os pontos da forma  $(-\pi - \beta + 2k\pi, 0)^*$  são selas.

Para cada  $\beta > 0$  fixo, a função

$$\bar{x}_\beta(t) = (\pi/2 + \beta)e^{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}t} - \pi - \beta$$

é solução de

$$x'' + cx' - x - \pi = \beta.$$

Por outro lado,  $\bar{x}_\beta(t)$  é crescente,  $\bar{x}_\beta(0) = -\pi/2$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{x}_\beta(t) = -\pi - \beta$  e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{x}'_\beta(t) = 0$ . Concluimos que  $(\bar{x}_\beta, \bar{x}'_\beta)$  é uma solução de (2.29) em  $] -\infty, 0[$  dentro da variedade instável de  $(-\pi - \beta, 0)^*$ . Fixemos  $y_\beta = (x_\beta, v_\beta)$  a solução de (2.29) que coincide com  $(\bar{x}_\beta, \bar{x}'_\beta)$  no intervalo  $] -\infty, 0[$  (ver Figura 2.8). A função  $v_\beta$  é positiva no intervalo  $] -\infty, 0[$ ; seja  $t_\beta > 0$  o primeiro valor

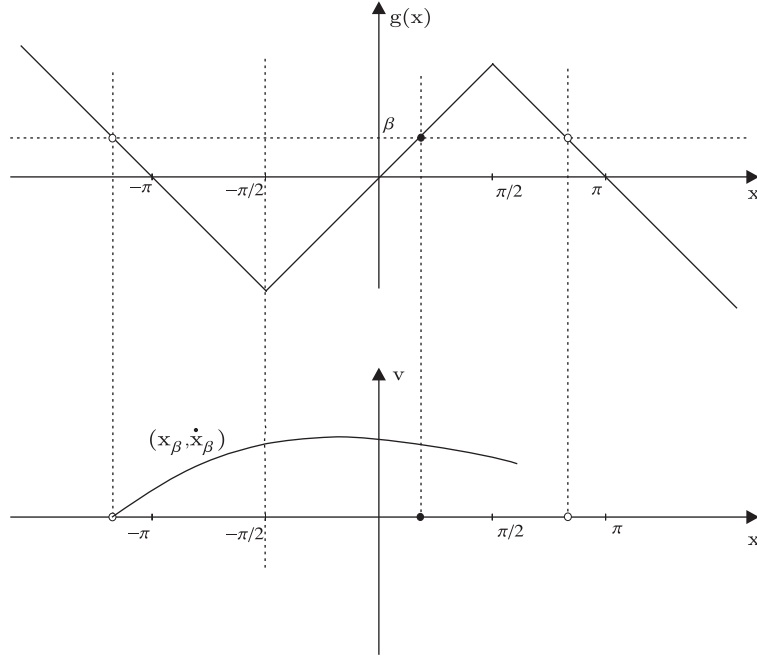


Figura 2.8:

onde  $v_\beta(t_\beta) = 0$ , caso  $v_\beta(t) > 0$  para todo o  $t > 0$  definimos  $t_\beta = +\infty$ . Vamos provar nos próximos lemas que existe  $\beta_1 \in ]0, \pi/2[$  tal que se  $\beta_1 < \beta < \pi/2$  então  $t_\beta = +\infty$ .

**Lema 2.4.1.** *Se  $c < 2$ , existe  $\beta_0 \in ]0, \pi/2[$  tal que para cada  $\beta_0 \leq \beta < \pi/2$  existe  $0 < t_\beta^1 < t_\beta$  tal que  $x_\beta(t_\beta^1) > \pi/2$  e  $v_\beta(t) > 0$ , para todo o  $t \in ]-\infty, t_\beta^1[$ .*

**Dem.** Observemos que a função

$$\tilde{x}_\beta(t) = (\pi/2 + \beta)e^{-\frac{c}{2}t} \left[ \frac{-2c + \sqrt{c^2 + 4}}{\sqrt{4 - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - c^2}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{4 - c^2}}{2}t\right) \right] + \beta$$

é a solução da equação

$$x'' + cx' + x = \beta$$

que verifica

$$\tilde{x}_\beta(0) = -\pi/2 = \bar{x}_\beta(0) \text{ e } \tilde{x}'_\beta(0) = (\pi/2 + \beta) \left( \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \right) = \bar{x}'_\beta(0).$$

Definindo

$$f(t) = e^{-\frac{c}{2}t} \left[ \frac{-2c + \sqrt{c^2 + 4}}{\sqrt{4 - c^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4 - c^2}}{2}t\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{4 - c^2}}{2}t\right) \right],$$

observamos que o valor mais pequeno  $t_2 > 0$  onde  $f'(t_2) = 0$  é tal que  $f(t_2) > 0$ . Concluimos que a função  $\tilde{x}_\beta(t) = (\pi/2 + \beta)f(t) + \beta$  é crescente em  $[0, t_2]$  e  $\tilde{x}_\beta(t_2) = (\pi/2 + \beta)f(t_2) + \beta > \pi/2$  se

$$\beta > \beta_0 = \max \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \frac{1 - f(t_2)}{1 + f(t_2)} \right\}.$$

Se  $t_3 > 0$  for o primeiro valor para o qual  $\tilde{x}_\beta(t) \notin ]-\pi/2, \pi/2[$ , então  $x_\beta(t) = \tilde{x}_\beta(t)$  em  $]0, t_3[$ , concluimos que para cada  $\beta > \beta_0$  existe  $t_\beta^1$  tal que  $x_\beta(t_\beta^1) > \pi/2$  e  $v_\beta > 0$  para todo o  $t \in ]-\infty, t_\beta^1[$ . c.q.d.

**Lema 2.4.2.** *Se  $c < 2$ , existe  $\beta_1 \in ]0, \pi/2[$  tal que se  $\beta_1 < \beta < \pi/2$  então  $t_\beta = +\infty$ .*

**Dem.** Seja  $\beta_0$  dado pelo último lema. Consideremos  $\beta_1 \in ]\beta_0, \pi/2[$  tal que  $x_{\beta_0}(t_{\beta_0}^1) > \pi - \beta_1$ . Consideremos ainda  $\beta_1 < \beta < \pi/2$ . Pelo último lema  $v_\beta$  está bem definida como função de  $x$  e é positiva no intervalo  $] -\pi - \beta, x_\beta(t_\beta^1)[$  (com  $x_\beta(t_\beta^1) > \pi/2$ ). Por outro lado,  $v_\beta(x)$  é solução de

$$\frac{dv}{dx} = -c + \frac{\beta - g(x)}{v}, \quad (2.30)$$

no mesmo intervalo. Como

$$\frac{dv_{\beta_0}}{dx} = -c + \frac{\beta_0 - g(x)}{v} < -c + \frac{\beta - g(x)}{v},$$

$v_{\beta_0}$  é uma sub-solução de (2.30) no intervalo  $] -\pi - \beta_0, \pi - \beta_1[$ . Considerando uma constante  $L$  suficientemente grande obtemos uma sobre-solução. Este par de sub e sobre-soluções forma um funil para a equação (2.30) no intervalo  $] -\pi - \beta_0, \pi - \beta_1[$  (ver Figura 2.9). Como  $v_\beta(-\pi - \beta_0) \in ]0, L[$ , concluimos que  $v_\beta(x)$  está bem definida e é positiva no intervalo  $] -\pi - \beta, \pi - \beta[$ . Analogamente podemos concluir que  $v_\beta$  está bem definida e é positiva no intervalo  $] \pi - \beta, 3\pi - \beta[$ , usando  $v_\beta(x - 2\pi)$  como sub-solução e uma constante como sobre-solução. Por indução concluimos que  $v_\beta(x)$  está bem definida e é positiva no intervalo  $] -\pi - \beta, +\infty[$ . Logo  $t_\beta = +\infty$ . c.q.d.

Na demonstração do último lema usámos o conceito de sobre e sub-soluções para construir um funil. Na demonstração do próximo teorema vamos usar este mesmo conceito para provar a existência de solução para um problema de valores de fronteira periódico. Mais precisamente, vamos usar o seguinte resultado clássico:

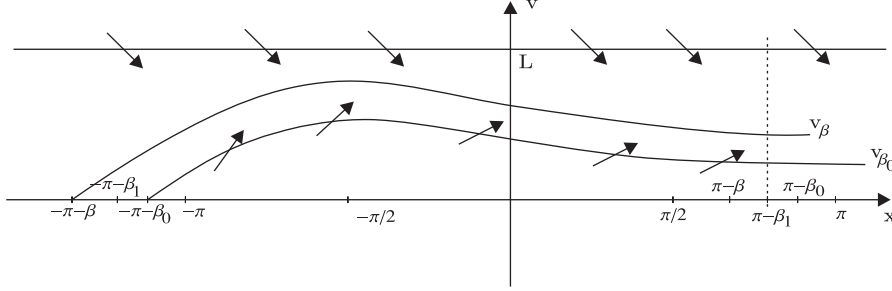


Figura 2.9:

**Teorema 2.4.3.** Consideremos  $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$  e  $\alpha, \beta \in C^1[0, T]$  verificando

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad \forall t \in [0, T],$$

e  $\alpha(0) \leq \alpha(T) < \beta(T) \leq \beta(0)$ . Então  $\alpha, \beta$  são chamados um par ordenado de sub e sobre-soluções e existe uma solução  $T$ -periódica  $x$  de  $x' = f(t, x)$  tal que  $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ , para todo  $t \in [0, T]$ .

**Lema 2.4.4.** Se  $c < 2$ , existe  $\beta_1 \in ]0, \pi/2[$  tal que se  $\beta_1 < \beta < \pi/2$  a equação (2.29) tem uma solução periódica rotativa.

**Dem.** Consideremos  $\beta_1$  dado pelo último lema e  $\beta_1 < \beta < \pi/2$ . Usando  $v_\beta(x)$  como sub-solução e uma constante  $L$  suficientemente grande como sobre-solução, obtemos um par ordenado de sub e sobre-soluções de (2.30) no intervalo  $[-\pi - \beta, \pi - \beta]$ . Concluimos que (2.30) tem uma solução periódica positiva. A esta solução corresponde uma solução periódica rotativa de (2.29). c.q.d.

Apresentamos agora o resultado central desta secção:

**Teorema 2.4.5.** Dado  $c < 2$ , existe  $\beta_1 \in ]0, \pi/2[$  tal que se  $\beta_1 < \beta < \pi/2$  o atrator da aplicação de Poincaré associado à equação (2.29) não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .

**Dem.** Consideremos a solução periódica rotativa  $(x_0, v_0)$  dada pelo último lema. Pelo Lema 1.4.1 concluimos que

$$\overline{\{(x_0(t), v_0(t)) : t \in \mathbb{R}\}} \cup \overline{\{(-\pi - \beta, 0)\}} \cup \overline{\{(\beta, 0)\}} \subset \mathcal{A}.$$

Observemos que os pontos  $\overline{(-\pi - \beta, 0)}$  e  $\overline{(\beta, 0)}$  não pertencem à órbita  $\overline{(x_0, v_0)}$ . Como  $\{\overline{(x_0(t), v_0(t))} : t \in \mathbb{R}\}$  é um subconjunto próprio de  $\mathcal{A}$  e é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  concluímos que  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .



# Capítulo 3

## Conexões com os trabalhos de R. A. Smith

Russel A. Smith em [Sm2] procura condições suficientes para a existência de soluções periódicas estáveis para uma equação do tipo de (1.1), sem a condição de periodicidade em  $x$ . Vamos ver que uma das suas condições implica a condição  $(F_1)$ . Finalmente, vamos aproveitar as ideias desenvolvidas em trabalhos relacionados com teoria do controlo para mostrar que certas classes de sistemas verificam  $(F_1)$ .

### 3.1 A condição de R. A. Smith

No artigo [Sm2] é introduzida a condição seguinte:

$$(F_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Suponhamos que existe } \lambda > 0, \epsilon > 0 \text{ e } P \text{ uma matriz real simétrica,} \\ \text{com um valor próprio negativo, todos os outros valores próprios} \\ \text{positivos, de tal forma que} \\ (x_1 - x_2)^* P [F(t, x_1) - F(t, x_2) + \lambda(x_1 - x_2)] \leq -\epsilon \|x_1 - x_2\|^2, \\ \text{para todo o } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Antes de demonstrar a proposição central deste Capítulo vamos provar um lema auxiliar.

**Lema 3.1.1.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação linear tal que  $\text{Ker} Q = \text{span}\{R\}$ . Então  $e(A)$  é limitado em  $\mathcal{C}$  sse  $Q(A)$  é limitado em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Dem.** Para cada  $x \in A$  seja  $u_x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u_x \in \bar{x} \cap S_0$  e  $d(\bar{x}, 0) = \|u_x\|$ . Assim,  $e(A)$  é limitado em  $\mathcal{C}$  sse o conjunto  $\{u_x : x \in A\}$  é limitado em  $\mathbb{R}^n$ . Concluimos que o conjunto  $A$  é limitado em  $\mathcal{C}$  sse o conjunto  $\{Q(u_x) : x \in A\}$

é limitado em  $\mathbb{R}^n$ . Finalmente, observando que  $Q(u_x) = Q(x)$ , para todo o  $x \in A$ , o lema fica demonstrado. c.q.d.

Vamos ver que a condição  $(F_2)$  é mais forte do que  $(F_1)$ , ou seja:

**Proposição 3.1.2.** *Se o sistema (1.1) satisfaz a condição  $(F_2)$  então também satisfaz a condição  $(F_1)$ .*

**Dem.** Sejam  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$  os valores próprios de  $P$  contados de acordo com a sua multiplicidade. Consideremos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  uma base ortonormada de vectores próprios associada a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Tomando  $x_1 = R$  e  $x_2 = 0$  em  $(F_2)$  obtemos  $R^*PR \leq -\epsilon \|R\|^2/\lambda$ ; pelo que se conclui que  $R \notin \text{span}\{V_2, \dots, V_n\}$ . Consideremos o subespaço  $\mathcal{F} = \text{span}\{V_2, \dots, V_n\}$  de dimensão  $n-1$  e  $Q$  a projecção sobre  $\mathcal{F}$  tal que  $\text{Ker}Q = \text{span}\{R\}$ . Consideremos  $x_1, x_2$  duas soluções distintas de (1.1) e limitadas em  $\mathcal{C}$ . Pelo lema anterior podemos tomar uma constante  $c_1$  tal que

$$\|Q(x_1(t) - x_2(t))\| < c_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definimos  $V(x) = x^*Px$  e vamos mostrar que o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Q(x)\| < c_1 \text{ e } V(x) \geq 0\}$$

é limitado. Se por absurdo assim não fosse, existiria uma sucessão de elementos de  $A$  que se pode escrever na forma

$$x_n = Q(x_n) + \alpha_n R,$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $\alpha_n$  é uma sucessão ilimitada. Mas nesse caso obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq x_n^*Px_n &= Q(x_n)^*PQ(x_n) + 2\alpha_n Q(x_n)^*PR + \alpha_n^2 R^*PR \\ &\leq c_1^2 |P| + 2c_1 |\alpha_n| \|P\| \|R\| - \alpha_n^2 \frac{\epsilon}{\lambda} \|R\|^2; \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Por  $(F_2)$  obtemos

$$\frac{d}{dt} (e^{2\lambda t} V(x_1(t) - x_2(t))) \leq -2\epsilon e^{2\lambda t} \|x_1(t) - x_2(t)\|^2 < 0;$$

pelo que  $e^{2\lambda t} V(x_1(t) - x_2(t))$  é decrescente. Se por absurdo  $x_1(0) - x_2(0) \in \mathcal{F}$  então

$$e^{2\lambda t} V(x_1(t) - x_2(t)) \geq V(x_1(0) - x_2(0)) > 0,$$

para todo o  $t < 0$ ; logo  $\tilde{A} = \{x_1(t) - x_2(t), t < 0\}$  é ilimitado. Como  $\tilde{A}$  é um subconjunto de  $A$ , obtemos um absurdo. c.q.d.

No mesmo artigo [Sm2] o autor encontra condições para que um sistema do tipo de (1.5) verifique  $(F_2)$ . Vamos então supor que temos um sistema do tipo

$$x' = Cx + J(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

satisfazendo as condições assumidas na Secção 1.3. Recordemos que

$$\Lambda = -\max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \text{ é um valor próprio não nulo de } C\}.$$

Para cada  $\lambda \in ]0, \Lambda[$  definimos  $\mu(\lambda)$  por

$$\mu(\lambda)^{-2} = \inf_{\omega \in \mathbb{R}} \min \sigma\{(C + \lambda I - i\omega I)(C^* + \lambda I + i\omega I)\}.$$

Observemos que, utilizando a caracterização variacional do menor valor próprio de uma matriz Hermitica (ver [LaTi], pag. 285),

$$\min \sigma\{(C + \lambda I - i\omega I)(C^* + \lambda I + i\omega I)\} = \min_{\|x\|=1} \bar{x}^*(C + \lambda I - i\omega I)(C^* + \lambda I + i\omega I)x$$

$$= \min_{\|x\|=1} \|(C^* + \lambda I + i\omega I)x\|^2 \geq \min_{\|x\|=1} (w^2\|x\|^2 - \|(C^* + \lambda I)x\|^2)$$

$$= w^2 - \max_{\|x\|=1} \|(C^* + \lambda I)x\|^2,$$

que tende para  $+\infty$  quando  $|w| \rightarrow +\infty$ . Dado que  $\operatorname{Ker}(C^* + \lambda I + i\omega I) = 0$ , concluímos que  $\mu(\lambda)^{-2} > 0$ . Em particular, a matriz  $(C + \lambda I - i\omega I)(C^* + \lambda I + i\omega I)$  é definida positiva.

Diremos que  $J$  é  $K$ -Lipschitziana na segunda variável se

$$\|J(t, x) - J(t, y)\| \leq K\|x - y\|$$

para todo o  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ . Vamos necessitar do seguinte teorema provado em [Ja].

**Teorema 3.1.3.** *Se  $r \in \mathbb{N}$  é par e*

$$B(z) = B_0 + B_1z + B_2z^2 + \dots + B_rz^r, \quad z \in \mathbb{C}, \quad B_0, \dots, B_r \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

*é um polinómio de matrizes tal que  $(B(z))^* = B(-\bar{z})$  e  $(B(i\omega))$  é semi-definida positiva (i.e.  $x^*B(i\omega)x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ ) para todo o  $\omega \in \mathbb{R}$ . Então existe um polinómio de matrizes*

$$h(z) = C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{r/2}z^{r/2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad C_0, \dots, C_{r/2} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}),$$

*tal que*

$$B(z) = (h(-\bar{z}))^*h(z).$$

O próximo resultado foi provado em [Sm1] e [Sm2] para equações muito mais gerais. Vamos fazer um resumo da demonstração para este contexto.

**Teorema 3.1.4.** *Se  $J$  for  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e  $K < \mu(\lambda)^{-1}$  para algum  $\lambda \in ]0, \Lambda[$ , então (3.1) satisfaz  $(F_2)$ .*

**Dem.** Tal como na última demonstração usamos a função auxiliar  $V(x) = x^*Px$ . Dado que estamos a supor existência e unicidade para o problema de condições iniciais,  $(F_2)$  é verificada sse para cada par  $x_1, x_2$ , de soluções de (1.1) temos

$$\frac{d}{dt}[e^{2\lambda t}V(x_1(t) - x_2(t))] \leq -2\epsilon e^{2\lambda t}\|x_1(t) - x_2(t)\|^2. \quad (3.2)$$

Dado um par  $x_1, x_2$  de soluções distintas de (1.1), a diferença  $X = x_1 - x_2$  verifica a equação

$$X' = CX + M(t)X,$$

onde

$$M(t) = \frac{1}{\|X(t)\|^2}(J(t, x_1(t)) - J(t, x_2(t)))X(t)^* \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Por hipótese temos  $|M(t)| \leq K$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .

Consideremos  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que  $K < \gamma^{-1} < \mu(\lambda)^{-1}$  e o polinómio de matrizes

$$B(z) = \gamma^2(C^* + \lambda I + zI)(C + \lambda I - zI) - I, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dado que  $\gamma > \mu(\lambda)$ , todos os valores próprios de  $B(iw)$  são positivos, assim  $B(iw)$  é definida positiva qualquer que seja o  $w \in \mathbb{R}$ . Por outro lado,  $(B(z))^* = B(-\bar{z})$ . Utilizando agora o teorema anterior podemos concluir que existe um polinómio de matrizes do tipo  $h(z) = C_1 + C_2z$ ,  $C_1, C_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que

$$B(z) = (h(-\bar{z}))^*h(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^2(C^* + \lambda I)(C + \lambda I) - I = C_1^*C_1 \\ \gamma^2(C - C^*) = C_1^*C_2 - C_2^*C_1 \\ \gamma^2I = C_2^*C_2 \end{cases}.$$

Consideremos a matriz simétrica

$$P = -\gamma^2(C + \lambda I) - C_2^*C_1 = -\gamma^2(C^* + \lambda I) - C_1^*C_2.$$

Se  $Y = e^{\lambda t}X$ , então  $Y' = (C + \lambda I)Y + M(t)Y$  e (algumas das igualdades seguintes envolvem cálculos longos embora básicos, além disso, algumas das igualdades são mais facilmente verificadas da frente para trás)

$$\frac{d}{dt}[e^{2\lambda t}V(X(t))] = (Y')^*PY + Y^*PY'$$

$$\begin{aligned}
&= (Y')^*(-\gamma^2(C + \lambda I) - C_2^*C_1)Y + Y^*(-\gamma^2(C^* + \lambda I) - C_1^*C_2)Y' \\
&= \gamma^2[Y^*(C^* + \lambda I) - (Y')^*][(C + \lambda I)Y - Y'] - Y^*Y - (Y^*C_1^* + (Y')^*C_2^*)(C_1Y + C_2Y') \\
&= \gamma^2(M(t)Y)^*(M(t)Y) - Y^*Y - \|C_1Y + C_2Y'\|^2 \\
&\leq -\left(1 - \gamma^2\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |M(t)|\right)^2\right) \|Y\|^2.
\end{aligned}$$

Concluimos que (3.2) é satisfeita com

$$2\epsilon = 1 - \gamma^2\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |M(t)|\right)^2 > 0.$$

Até agora mostrámos que

$$(x_1 - x_2)^*P[C(x_1 - x_1) + J(t, x_1) - J(t, x_2) + \lambda(x_1 - x_2)] \leq -\epsilon\|x_1 - x_2\|^2,$$

para todo o  $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ . Falta ver que  $P$  têm a forma exigida pela condição  $(F_2)$ . Observemos que  $P$  não depende de  $J$ , em particular se  $J \equiv 0$  obtemos  $\epsilon = 1/2$  e

$$(x_1 - x_2)^*P(C + \lambda I)(x_1 - x_2) \leq -\epsilon\|x_1 - x_2\|^2,$$

para todo o  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ . Tomando  $x_1 = x + h$  and  $x_2 = x$  obtemos

$$h^*P(C + \lambda I)h \leq -\epsilon\|h\|^2.$$

Assim, a matriz simétrica da forma quadrática  $1/2(P(C + \lambda I) + (C^* + \lambda I)P)$  é definida negativa. Utilizando o teorema geral da inércia (ver [LaTi], p.445) concluimos que  $-P$  e  $C + \lambda I$  têm o mesmo número de valores próprios com parte real positiva, nula e negativa. c.q.d.

Dada uma equação do tipo de (1.1), podemos escreve-la como (3.1) de várias formas. Assim o teorema anterior dá varias condições para que o sistema verifique  $(F_2)$ .

**Corolário 3.1.5.** *Consideremos uma equação do tipo de (3.1) tal que a aplicação de Poincaré associada é dissipativa. Se  $J$  é  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e se  $K < \mu(\lambda)^{-1}$  para algum  $\lambda \in ]0, \Lambda[$ , então  $\pi_{/\mathcal{A}}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** O resultado é consequência do último teorema, Proposição 3.1.2 e Teorema 1.4.2. c.q.d.

No caso particular de  $C$  ser semi-simples (ver definição na Secção 1.3) é fácil calcular o valor de  $\mu(\lambda)$ .

**Teorema 3.1.6.** *Consideremos uma equação do tipo de (3.1) tal que a aplicação de Poincaré associada é dissipativa. Suponhamos que  $C$  é semi-simples e que  $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é uma matriz invertível tal que  $MCM^{-1}$  é do tipo de (1.6). Se a função  $G(t, y) = MJ(t, M^{-1}y)$  for  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e  $K < \Lambda/2$ . Então  $\pi|_{\mathcal{A}}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** Suponhamos que  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_{r+1} = a_{r+1} \pm ib_{r+1}, \dots, \lambda_s = a_s \pm ib_s \in \mathbb{C}$  são os valores próprios de  $C$  escritos de acordo com a sua multiplicidade. Dado que  $C$  é semi-simples, a matriz  $MCM^{-1} = D$  tem valores próprios ou caixas do tipo  $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ ,  $i \in \{r+1, \dots, s\}$  na diagonal e todas as restantes entradas nulas. A mudança de variáveis  $y = Mx$  transforma a equação (3.1) em

$$y' = Dy + G(t, y). \quad (3.3)$$

Observemos que a equação acima é do tipo de (3.1); em particular

$$G(t, y) = G(t + T, y) = G(t, y + \tilde{R})$$

onde  $\tilde{R} = MR$ .

Para cada  $\lambda \in ]0, \Lambda[$  e  $w \in \mathbb{R}$ , a matriz  $(D + \lambda I - iwI)(D^* + \lambda I + iwI)$  tem elementos da forma  $(\lambda_i + \lambda)^2 + w^2$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  ou caixas da forma  $\begin{pmatrix} (a_i + \lambda)^2 + w^2 + b_i^2 & -2iwb_i \\ 2iwb_i & (a_i + \lambda)^2 + w^2 + b_i^2 \end{pmatrix}$ ,  $i \in \{r+1, \dots, s\}$ , na diagonal e todos os restantes elementos são nulos. Concluimos que os valores próprios de  $(D + \lambda I - iwI)(D^* + \lambda I + iwI)$  são

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + w^2, (\lambda_2 + \lambda)^2 + w^2, \dots, (\lambda_r + \lambda)^2 + w^2, (a_{r+1} + \lambda)^2 + (w \pm b_{r+1})^2, \dots, \\ &(a_s + \lambda)^2 + (w \pm b_s)^2. \end{aligned}$$

Obtemos então para a equação (3.3)

$$\begin{aligned} \mu(\lambda)^{-2} &= \min\{\lambda^2, (\lambda_2 + \lambda)^2, \dots, (\lambda_r + \lambda)^2, (a_{r+1} + \lambda)^2, \dots, (a_s + \lambda)^2\} \\ &= \min\{\lambda^2, (\lambda - \Lambda)^2\}. \end{aligned}$$

Assim  $\mu(\Lambda/2)^{-1} = \Lambda/2$ . Concluimos, pelo Teorema 3.1.4 e pela Proposição 3.1.2 que (3.3) satisfaz  $(F_1)$  sempre que  $K < \Lambda/2$ .

Vamos ver que se (3.3) satisfaz  $(F_1)$  então (3.1) também satisfaz  $(F_1)$ . De facto, se  $\tilde{\mathcal{F}}$  é um subespaço de dimensão  $n - 1$  nas condições de  $(F_1)$  e dadas duas soluções  $x_1, x_2$  de (3.1) limitadas em  $\mathcal{C}$  então podemos usar o Lema 3.1.1 para mostrar que  $y_1 = Mx_1$  e  $y_2 = Mx_2$  são soluções de (3.3) limitadas no cilindro  $\tilde{\mathcal{C}}$  correspondente à equação (3.3), logo  $y_1(0) - y_2(0) \notin \tilde{\mathcal{F}}$  e consequentemente  $x_1(0) - x_2(0) \notin M^{-1}\tilde{\mathcal{F}}$ . Concluimos que (3.1) verifica a condição  $(F_1)$  com  $\mathcal{F} = M^{-1}\tilde{\mathcal{F}}$ . O resultado é agora consequência do Teorema 3.1.5. c.q.d.





# Capítulo 4

## Sistemas de osciladores acoplados

Neste capítulo vamos ver aplicações dos teoremas demonstrados no último capítulo. Estudaremos modelos de pêndulos acoplados. Vamos ver que sempre que o atrito é suficientemente forte estes sistemas têm um atrator homeomorfo ao círculo. Na última seção estudaremos equações ordinárias de ordem  $n$ .

### 4.1 Um sistema de osciladores simetricamente acoplados

Vamos estudar nesta seção o caso particular em que  $C$  é uma matriz simétrica. Neste caso o estudo da equação (3.1) fica bastante simplificado já que a matriz  $M$  que aparece no Teorema 3.1.6 pode ser tomada ortogonal.

**Corolário 4.1.1.** *Consideremos uma equação do tipo de (3.1) tal que a aplicação de Poincaré associada é dissipativa. Suponhamos que  $C$  é uma matriz simétrica,  $J$  é  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e que  $K < \Lambda/2$ . Então  $\pi|_{\mathcal{A}}$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{A}$  para  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** No caso de  $C$  ser simétrica, existe uma matriz ortogonal  $M$  tal que  $MCM^{-1}$  é diagonal (em particular  $C$  é semi-simples). Obviamente que  $G(t, y) = MJ(t, M^{-1}y)$  é também  $K$ -Lipschitziana na segunda variável, logo o resultado é consequência do Teorema 3.1.6. c.q.d.

Consideramos como exemplo o sistema (3.1) com

$$C = -\nu \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Deste modo, ficamos com o sistema de equações em  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x'_1 = \nu(x_2 - x_1) + J(t, x) \\ x'_2 = \nu(x_1 - 2x_2 + x_3) + J(t, x) \\ \vdots \\ x'_n = \nu(x_{n-1} - x_n) + J(t, x) \end{cases},$$

onde  $\nu > 0$  é o chamado coeficiente de acoplamento. Neste caso particular a matriz  $C$  é simétrica e os valores próprios de  $C$  são:

$$-4\nu \sin^2 \left( \frac{(j-1)\pi}{2n} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Se a aplicação de Poincaré associada for dissipativa (que é o caso se  $J$  for limitada ou mais geralmente se estiver nas condições da Proposição 1.3.3) então o atrator associado é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  se  $J$  for  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e  $K < 2\nu \sin^2(\frac{\pi}{2n})$ .

O caso particular (autónomo) em que  $J(t, x) = (w_1 - \sin(x_1), \dots, w_n - \sin(x_n))$  foi estudado em [QiZhQi], onde foi provado que  $\mathcal{A}$  é homeomorfo ao círculo para todo o  $\nu > 0$ .

## 4.2 Um sistema de $n$ pêndulos acoplados

Consideremos uma equação do tipo das estudadas no Capítulo 2

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -cv - g(t, x) \end{cases}, \quad c > 0,$$

onde  $g$  é  $T$ -periódica em  $t$ ,  $2\pi$ -periódica em  $x$  e  $K$ -Lipschitziana na segunda variável. Podemos escrever este sistema na forma  $y' = Cy + J(t, y)$  com

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad J(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(t, x) \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $C$  tem valores próprios  $0$ ,  $-c$  e que  $g$  é limitada; pelo Teorema 1.3.3 a aplicação de Poincaré é associada a esta equação é dissipativa e logo existe um atrator  $\mathcal{A}$ . Por outro lado, os vectores próprios associados a  $0$ ,  $-c$  são  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 \\ -c \end{pmatrix}$  respectivamente, pelo que se  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$  e  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/c \\ 0 & -1/c \end{pmatrix}$  temos  $M^{-1}CM = \text{diag}(0, -c)$ . Definindo  $G(t, x, v) = M^{-1}J(t, M(x, v)^*)$  temos

$$\begin{aligned} \|G(t, x_1, v_1) - G(t, x_2, v_2)\| &= \|M^{-1}(0, -g(t, x_1 + v_1) + g(t, x_2 + v_2))\| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{c} |g(t, x_1 + v_1) - g(t, x_2 + v_2)| \leq \frac{\sqrt{2}}{c} K |x_1 - x_2 + v_1 - v_2| \\ &\leq \frac{2K}{c} \|(x_1, v_1) - (x_2, v_2)\|, \end{aligned}$$

ou seja,  $G$  é  $\frac{2K}{c}$ -Lipschitziana em  $y$ . Pelo Teorema 3.1.6 podemos concluir que o atrator associado a  $\mathcal{A}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  sempre que

$$\frac{2K}{c} < \frac{c}{2} \Leftrightarrow K < \frac{c^2}{4}.$$

Desta forma, reobtemos parcialmente o resultado do Teorema 2.1.3. O Teorema 2.1.3 tem a vantagem de se referir a uma equação onde o coeficiente de atrito não é constante e de não exigir limite inferior para

$$\frac{g(t, x_1) - g(t, x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Contudo, o Teorema 3.1.6 pode ser aplicado a equações com mais graus de liberdade, como vamos ver de seguida.

Consideremos o seguinte sistema de equações em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ ,

$$u'' + \gamma u' + Au + S(t, u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva e  $A$  é uma matriz em  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , simétrica, com um valor próprio nulo  $\alpha_1 = 0$  e todos os restantes positivos  $\alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  (escritos por ordem crescente e de acordo com a sua multiplicidade). Vamos então supor que  $\eta \in \mathbb{R}^n$  de norma 1 é tal que

$$\text{Ker} A = \text{span}\{\eta\}. \quad (4.3)$$

Além disso,  $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação contínua e de tal forma que  $S(t, u + \eta) = S(t, u) = S(t + T, u)$  para todo o  $(t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e para alguma

constante positiva  $T$ . Finalmente, vamos supor que  $S$  e de tal forma que o problema (4.2) têm existência e unicidade de solução para cada conjunto de condições iniciais.

Este tipo de equação surge quando se discretiza a equação de derivadas parciais de sine-Gordon, além disso é um modelo mecânico para um sistema de pêndulos acoplados ou um sistema de juntas de Josephson (ver [HoLeMi]).

Considerando  $u' = v$ , o sistema (4.2) pode ser escrito como um sistema de primeira ordem do tipo de (3.1) onde  $x = (u, v)^* \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -A & -\gamma I_n \end{pmatrix}, \quad J(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -S(t, u) \end{pmatrix}.$$

Observemos que para  $R = (\eta, 0)^* \in \mathbb{R}^{2n}$  temos  $J(t, y + R) = J(t, y)$  para todo o  $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$ .

Dado que  $A$  é uma matriz simétrica, podemos tomar uma base ortonormada  $\{\eta, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n\}$  de vectores próprios de  $A$ , associados aos valores próprios  $\alpha_1 = 0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  respectivamente. A matriz cujas colunas são constituídas pelos vectores da base acima

$$P_1 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta & \eta_2 & \dots & \eta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

é ortogonal, isto é  $P_1^{-1} = P_1^*$ , e  $P_1^* A P_1 = \text{diag}(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Considerando  $P_2 = \begin{pmatrix} P_1^* & 0 \\ 0 & P_1^* \end{pmatrix}$  obtemos

$$P_2 C P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\text{diag}(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) & -\gamma I_n \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a matriz  $P_3$  correspondente à aplicação linear

$$P_3 : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)^* \rightarrow (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n)^*$$

é de tal forma que

$$P_3 P_2 C P_2^{-1} P_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ 0 & -\gamma & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -\alpha_2 & -\gamma & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -\alpha_n & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Para cada  $i = 1, \dots, n$  consideremos o bloco

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_i & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Vamos supor que  $\gamma^2 - 4\alpha_i \neq 0$ . Podemos então ter dois casos:

**Caso 1:** Se  $\gamma^2 - 4\alpha_i > 0$  então a matriz  $A_i$  tem dois valores próprios (que no caso da igualdade são iguais) reais,  $-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{2}$  e  $-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{2}$  associados a vectores próprios

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

respectivamente. Pelo que a matriz

$$M_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} & \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

com inversa

$$M_i^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

é tal que

$$M_i^{-1} A_i M_i = \text{diag} \left( -\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{2}, -\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_i}}{2} \right).$$

A escolha dos vectores próprios que formam a matriz  $M_i$  foi feita de modo a simplificar os cálculos a fazer futuramente.

**Caso 2:** Se  $\gamma^2 - 4\alpha_i < 0$  então a matriz  $A_i$  tem um par de valores próprios complexos conjugados  $-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}}{2}i$ ,  $-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}}{2}i$  com vectores próprios associados

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} + \frac{i}{2} \end{pmatrix}^* \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} - \frac{i}{2} \end{pmatrix}^* \quad \text{respectivamente.}$$

Pelo que a matriz

$$\widetilde{M}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} & 0 \\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

com inversa

$$\widetilde{M}_i^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{4\alpha_i - \gamma^2} & 0 \\ -\gamma & -2 \end{pmatrix}$$

é tal que

$$\widetilde{M}_i^{-1} A_i \widetilde{M}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & -\frac{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4\alpha_i - \gamma^2}}{2} & -\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

De tudo o que já vimos até aqui, concluímos que se  $\alpha_s$  é o maior valor próprio para o qual  $\gamma^2 - 4\alpha_i$  é positivo ou nulo e

$$P_4 = \begin{pmatrix} M_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_s^{-1} & & 0 \\ & & & \widetilde{M}_{s+1}^{-1} & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \widetilde{M}_n^{-1} \end{pmatrix}$$

então  $P_4 P_3 P_2 C P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1}$  é uma matriz da forma de (1.6) que tem na diagonal ou valores próprios de  $C$  ou então blocos em  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  com a forma de (4.4). Em particular,  $C$  é semi-simples. Com vista à aplicação do Teorema 3.1.6, interessa-nos calcular a constante de Lipschitz de

$$G(t, y) = P_4 P_3 P_2 J(t, P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1} y)$$

em  $y$ .

**Lema 4.2.1.** *Se  $y = (0, v)^* \in \mathbb{R}^{2n}$  então  $\|P_4 P_3 P_2 y\| = 2\|v\|$ .*

**Dem.** Dado  $y = (0, v)^* \in \mathbb{R}^{2n}$  temos:

$$\begin{aligned} \|P_4 P_3 P_2 y\| &= \|P_4 P_3(0, 0, \dots, 0, \eta^* v, \eta_2^* v, \dots, \eta_n^* v)\| \\ &= \|P_4(0, \eta^* v, 0, \eta_2^* v, 0, \dots, 0, \eta_n^* v)\| \\ &= \|(\sqrt{2}\eta^* v, -\sqrt{2}\eta^* v, \sqrt{2}\eta_2^* v, \dots, -\sqrt{2}\eta_s^* v, 0, -2\eta_{s+1}^* v, \dots, -2\eta_n^* v)\| \\ &= 2\|(\eta^* v, \eta_2^* v, \dots, \eta_n^* v)\| = 2\|P_1^* v\| = 2\|v\| \end{aligned}$$

c.q.d.

**Lema 4.2.2.** *Para todo o  $y = (u, v)^* \in \mathbb{R}^{2n}$  temos*

$$\|P_4 P_3 P_2 y\| \geq \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\alpha_i|} \|u\|.$$

**Dem.** Se  $y = (u, v)^* \in \mathbb{R}^{2n}$  então

$$\begin{aligned}
\|P_4 P_3 P_2 y\| &= \|P_4(\eta^* u, \eta^* v, \eta_2^* u, \eta_2^* v, \dots, \eta_n^* u, \eta_n^* v)\| = \\
&\left\| \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_1}}{\sqrt{2}} \right) \eta^* u + \sqrt{2} \eta^* v, \left( -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_1}}{\sqrt{2}} \right) \eta^* u - \sqrt{2} \eta^* v, \dots, \right. \\
&\left. \left( \frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_s}}{\sqrt{2}} \right) \eta_s^* u + \sqrt{2} \eta_s^* v, \left( -\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_s}}{\sqrt{2}} \right) \eta_s^* u - \sqrt{2} \eta_s^* v, \right. \\
&\left. \sqrt{4\alpha_{s+1} - \gamma^2} \eta_{s+1}^* u, -\gamma \eta_{s+1}^* u - 2\eta_{s+1}^* v, \dots, \sqrt{4\alpha_n - \gamma^2} \eta_n^* u, -\gamma \eta_n^* u - 2\eta_n^* v \right\| \\
&= \left( 2 \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_1}}{\sqrt{2}} \eta^* u \right)^2 + 4 \left( \frac{\gamma}{2} \eta^* u + \eta^* v \right)^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + 2 \left( \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_s}}{\sqrt{2}} \eta_s^* u \right)^2 + 4 \left( \frac{\gamma}{2} \eta_s^* u + \eta_s^* v \right)^2, \right. \\
&\quad \left( \sqrt{4\alpha_{s+1} - \gamma^2} \eta_{s+1}^* u \right)^2 + \left( -\gamma \eta_{s+1}^* u - 2\eta_{s+1}^* v \right)^2 + \dots, \\
&\quad \left. \sqrt{4\alpha_n - \gamma^2} \eta_n^* u \right)^2 + \left( -\gamma \eta_n^* u - 2\eta_n^* v \right)^2 \Big) \\
&\geq \sqrt{((\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_1} \eta^* u)^2 + \dots + (\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_s} \eta_s^* u)^2} \\
&\quad + (\sqrt{4\alpha_{s+1} - \gamma^2} \eta_{s+1}^* u)^2 + \dots + (\sqrt{4\alpha_n - \gamma^2} \eta_n^* u)^2)^{1/2}} \\
&\geq \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\alpha_i|} \|P_1^* u\| = \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\alpha_i|} \|u\|
\end{aligned}$$

c.q.d.

Finamente estamos em condições de demonstrar o teorema central desta secção. Observemos que neste caso

$$\Lambda = -\max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \text{ é um valor próprio não nulo de } C\}$$

vale  $\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha_2}}{2}$  se  $\gamma^2 - 4\alpha_2 > 0$  e  $\gamma/2$  se  $\gamma^2 - 4\alpha_2 < 0$ .

**Teorema 4.2.3.** *Suponhamos que  $\gamma^2 - 4\alpha_i \neq 0$ , a aplicação de Poincaré associada à equação (4.2) é dissipativa e  $S$  é  $K$ -Lipschitziana na segunda variável. Se*

$$K < \frac{\Lambda}{4} \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\alpha_i|}$$

*então a aplicação de Poincaré associada à equação (4.2) tem um atrator homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .*

**Dem.** Como  $C$  é semi-simples, pelo Teorema 3.1.6 basta mostrar que a constante de Lipschitz de  $G(t, y) = P_4 P_3 P_2 J(t, P_2^{-1} P_3^{-1} P_4^{-1} y)$  na segunda variável é inferior a  $\Lambda/2$ . De facto, para cada

$$y = P_4 P_3 P_2(u, v)^*, \quad y' = P_4 P_3 P_2(u', v')^* \in \mathbb{R}^{2n}$$

e  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos pelos dois lemas anteriores

$$\begin{aligned} \sup_{y \neq y'} \frac{\|G(t, y) - G(t, y')\|}{\|y - y'\|} &= \sup_{y \neq y'} \frac{\|P_4 P_3 P_2(0, -S(t, u) + S(t, u'))^*\|}{\|y - y'\|} \\ &= \sup_{y \neq y'} \frac{2\|S(t, u) - S(t, u')\|}{\|y - y'\|} \leq \sup_{y \neq y'} \frac{2K\|u - u'\|}{\|y - y'\|} \\ &\leq 2K \left( \min_{i=1, \dots, n} \sqrt{|\gamma^2 - 4\lambda_i|} \right)^{-1} < \frac{\Lambda}{2}. \end{aligned}$$

c.q.d.

Em [QiQiZh] foi estudado um sistema autónomo do tipo da equação (4.2) com uma matrix  $A$  da forma de (4.1). Foi também provada que a existência de um atrator homeomorfo ao círculo. O resultado é do tipo do obtido no teorema anterior, contudo as suas condições são independentes das exigidas aqui.

### 4.3 Uma equação ordinária de ordem $n$

Consideremos a equação de ordem  $n$

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_2x'' + a_1x' = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (4.5)$$

onde  $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua. Se  $y = (x, x', \dots, x^{(n-1)})^*$ , vamos supor que

$$g(t + T, y) = g(t, y) = g(t, y + (1, 0, \dots, 0)^*)$$

para todo o  $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $T > 0$ . Vamos supor, como habitual, que  $g$  é tal que a equação (4.5) tem existência e unicidade de solução para cada conjunto de condições iniciais

$$x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \dots, x''(t_0) = x_2, x'(t_0) = x_1, x(t_0) = x_0.$$



Uma função  $x$  é solução de (4.5) se e só se  $y = (x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})^* \in \mathbb{R}^n$  é solução do sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = -a_{n-1}y_n - \dots - a_1y_2 - g(t, y) \end{cases}, \quad (4.6)$$

ou seja, de

$$y' = Cy + J(t, y)$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -g(t, y) \end{pmatrix}$$

Facilmente se prova por indução que o polinómio característico de  $C$  é

$$(-1)^n(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x),$$

pelo que  $\lambda_1 = 0$  é um valor próprio de  $C$  que tem  $(1, 0, \dots, 0)^*$  como vector próprio. Vamos também supor que todos os restantes valores próprios de  $C$  são distintos, reais e negativos; sejam eles  $\lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_3 < \lambda_2 < 0$ . A cada um destes valores próprios  $\lambda_i$  está associado o vector próprio  $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1})^*$ ; concluímos então que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ 0 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

é tal que

$$P^{-1}CP = \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

A matriz  $P$ , chamada matriz de Vandermonde, é bem conhecida em problemas de interpolação polinomial. De facto, dados  $y, z \in \mathbb{R}^n$ , a equação

$$P^*y = z \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_1 + y_2\lambda_2 + y_3\lambda_2^2 + \dots + y_n\lambda_2^{n-1} = z_2 \\ \vdots \\ y_1 + y_2\lambda_n + y_3\lambda_n^2 + \dots + y_n\lambda_n^{n-1} = z_n \end{cases}$$

equivale a encontrar os coeficientes  $y_1, y_2, \dots, y_n$  de um polinómio  $L$  de grau  $n - 1$  que verifique

$$L(0) = z_1, L(\lambda_2) = z_2, \dots, L(\lambda_n) = z_n. \quad (4.7)$$

Ao polinómio  $L$  é usual chamar polinómio interpolador de Lagrange. Obviamente a unicidade deste polinómio depende do determinante de  $P$ .

**Lema 4.3.1.** *O determinante de  $P$  vale*

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (\lambda_i - \lambda_j).$$

**Dem.** Ver [La], pág.221.

Como estamos a supor que os  $\lambda_i$ 's são todos diferentes, o determinante de  $P$  é diferente de 0 e logo o polinómio  $L$  é único. Embora pudéssemos, pelo menos teoricamente, tentar inverter a matriz  $P$ , essa é uma tarefa complicada. Existe na verdade um modo mais simples de escrever o polinómio  $L$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  consideremos o polinómio

$$\begin{aligned} L_i(t) &= \frac{(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_{i-1})(t - \lambda_{i+1}) \dots (t - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} \\ &= \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (t - \lambda_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)}. \end{aligned}$$

Este polinómio, de grau  $n - 1$ , verifica

$$L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases},$$

pelo que

$$L(t) = z_1 L_1(t) + z_2 L_2(t) + \dots + z_n L_n(t)$$

é um polinómio de grau  $n - 1$  e verifica (4.7). Como já sabemos que só existe um polinómio nestas condições, concluimos que este é o polinómio interpolador de Lagrange.

Voltemos ao problema inicial da existência de um atrator unidimensional. Com vista á aplicação do Teorema 3.1.6 interessa-nos calcular a constante de Lipschitz de  $G(t, y) = P^{-1}J(t, Py)$ . Consideremos o vector

$$\Omega = \left( \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n (\lambda_1 - \lambda_j)}, \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n (\lambda_2 - \lambda_j)}, \dots, \frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n (\lambda_n - \lambda_j)} \right)^*.$$

**Lema 4.3.2.** Dado  $y = (0, 0, \dots, 0, y_n)^* \in \mathbb{R}^n$ , temos  $P^{-1}y = y_n\Omega$ .

**Dem.** Se  $y = (0, 0, \dots, 0, y_n)^* \in \mathbb{R}^n$ , então

$$P^{-1}y = y_n\Omega \quad \text{sse} \quad (P^{-1}y)^*z = (y_n\Omega)^*z, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Mas

$$(P^{-1}y)^*z = y^*(P^{-1})^*z = y^*(P^*)^{-1}z$$

é o produto de  $y_n$  pelo coeficiente de  $t^{n-1}$  no polinómio  $L(t)$  e este coeficiente (dada a forma de  $L$ ) vale

$$\sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Logo

$$(P^{-1}y)^*z = y_n \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} = y_n \Omega^*z = (y_n\Omega)^*z.$$

Dado que  $z$  é arbitrário, o resultado fica provado.

c.q.d.

Podemos finalmente indicar uma condição suficiente para a existência de um atrator homeomorfo ao círculo.

**Teorema 4.3.3.** Suponhamos que a aplicação de Poincaré associada à equação (4.6) é dissipativa. Se  $g$  for  $K$ -Lipschitziana na segunda variável e

$$K < -\frac{\lambda_2}{2\|\Omega\|\|P\|},$$

então a aplicação de Poincaré associada ao sistema (4.6) tem um atrator  $\mathcal{A}$  homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .

**Dem.** Visto que por hipótese  $C$  é semi-simples, pelo Teorema 3.1.6 basta mostrar que a constante de Lipschitz de  $G(t, y) = P^{-1}J(t, Py)$  na segunda variável é inferior a  $\frac{\lambda_2}{2} = -\frac{\lambda_2}{2}$ . Dados  $z' = Pz$ ,  $y' = Py \in \mathbb{R}^n$ , pelo último lema temos

$$\begin{aligned} \|G(t, z) - G(t, y)\| &= \|P^{-1}(0, 0, \dots, 0, -g(t, z') + g(t, y'))^*\| \\ &= \|\Omega\| |g(t, z') - g(t, y')| \leq K\|\Omega\| \|z' - y'\| \\ &= K\|\Omega\| \|PP^{-1}(z' - y')\| \leq K\|\Omega\| \|P\| \|z - y\| < -\frac{\lambda_2}{2} \|z - y\|, \end{aligned}$$

para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Pelo que o teorema fica provado.

c.q.d.

Um ponto fraco do teorema acima é a dificuldade de calcular  $\|P\|$  no caso geral para a norma Euclidiana; todavia não é difícil obter uma estimativa a partir do cálculo da norma de  $P$  relativamente à norma da soma em  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos a norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . A esta norma corresponde uma norma matricial dada por

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\},$$

para cada  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Assim,

$$\|P\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_j|^i \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_n|^i.$$

Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|Px\| \leq \|Px\|_1 \leq \|P\|_1 \|x\|_1 \leq n \|P\|_1 \|x\|,$$

concluimos então que

$$|P| \leq n \|P\|_1,$$

e logo:

**Corolário 4.3.4.** *Se*

$$K < -\frac{\lambda_2}{2\|\Omega\| \sum_{i=0}^{n-1} |\lambda_n|^i},$$

*então a aplicação de Poincaré associada ao sistema (4.6) tem um atrator  $\mathcal{A}$  homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ .*

Como exemplo concreto de aplicação do teorema acima tomemos o sistema

$$\begin{cases} x'' + c_1 x' + \sin(x) = p(t) \\ y'' + c_2 y' + y = x \end{cases},$$

que é um modelo mecânico para uma mola com atrito forçada pelo movimento de um pêndulo forçado por uma força periódica  $p(t)$ . A função  $y$  verifica a equação de quarta ordem

$$y^{(4)} + (c_1 + c_2)y''' + (1 + c_1 c_2)y'' + c_1 y' = -\sin(y'' + c_2 y' + y) + p(t),$$

que é do tipo de (4.5). Se  $c_2 > 2$ ,  $c_1 > 0$  então as raízes de  $\lambda^3 + (c_1 + c_2)\lambda^2 + (1 + c_1c_2)\lambda + c_1$  são  $-c_1$  e  $\frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4}}{2}$  (reais e negativas); pelo que podemos aplicar o último teorema.



# Apêndice

De forma análoga ao final da Secção 2.3, vamos considerar o espaço  $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  das funções contínuas e 1-periódicas com valores em  $\mathbb{R}$ , com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f(t)|;$$

os espaços  $C^i([a, b], \mathbb{R}^n)$ ,  $i \geq 0$ , das funções de classe  $C^i$  definidas num intervalo  $[a, b]$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ , com a norma

$$\|f\|_{C^i} = \sum_{j=0}^i \sup_{[a,b]} \|f^{(j)}\|;$$

finalmente o espaço  $C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$  das funções  $T$ -periódicas na primeira variável, 1-periódicas na segunda, contínuas, com valores em  $\mathbb{R}$  e tal que existe e é contínua a derivada parcial em ordem à segunda variável, com a norma

$$\|g\|_{C^{0,1}} = \sup_{\mathbb{R}^2} |g| + \sup_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|.$$

Todos estes espaços com as normas indicadas são espaços de Banach. Finalmente consideremos o espaço produto

$$X = C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

com a norma produto  $\|\cdot\|_X$ .

Dado  $(h, g) \in X$  a equação

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 - H(y_1) \\ y'_2 = -g(t, y_1) \end{cases}, \quad (4.8)$$

onde  $H(x) = \int_0^x h(s)ds$ , tem soluções  $x(t) = x(t; t_0, y_0, h, g)$ , tal que  $x(t_0) = y_0$ , definidas em todo o  $\mathbb{R}$ . Pretendemos demonstrar neste apêndice que a solução  $x$  depende de forma diferenciável de  $y_0$  e  $(h, g)$ . Provaremos este facto via teorema das funções implícitas em espaços de Banach. Vamos necessitar do seguinte lema:

**Lema 4.3.5.** *As funções*

$$\begin{aligned}\psi &: C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ &(\gamma, h) \rightarrow H(\gamma), \\ \phi &: C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ &(\gamma, g) \rightarrow g(\cdot, \gamma)\end{aligned}$$

são de classe  $C^1$  e temos

$$\begin{aligned}\psi'(\gamma^*, h^*)(\gamma, h) &= h^*(\gamma^*)\gamma + h(\gamma^*), \\ \phi'(\gamma^*, g^*)(\gamma, g) &= \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*)\gamma + g(\cdot, \gamma^*).\end{aligned}$$

**Dem.** Vamos demonstrar o resultado para a função  $\phi$ , o outro caso é análogo. Dado  $(\gamma^*, g^*) \in X$  vamos ver que  $\phi$  é diferenciável Fréchet em  $(\gamma^*, g^*)$ . De facto, dado  $(\gamma, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \times C^{0,1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ,

$$\begin{aligned}\phi((\gamma^*, g^*) + (\gamma, g)) - \phi(\gamma^*, g^*) - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*)\gamma - g(\cdot, \gamma^*) \\ = \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, c_1)\gamma - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*)\gamma + \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, c_2)\gamma,\end{aligned}$$

onde  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  estão entre  $\gamma^*(t) + \gamma(t)$  e  $\gamma^*(t)$ . Se  $\max\{\|\gamma\|_{C^0}, \|g\|_{C^{0,1}}\} \rightarrow 0$  então  $c_1$  e  $c_2$  tendem uniformemente para  $\gamma^*$ . Dividindo a norma da expressão acima por  $\max\{\|\gamma\|_{C^0}, \|g\|_{C^{0,1}}\}$  obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\left\| \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, c_1)\gamma - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*)\gamma + \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, c_2)\gamma \right\|_{C^0}}{\max\{\|\gamma\|_{C^0}, \|g\|_{C^{0,1}}\}} \\ \leq \left\| \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, c_1) - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*) \right\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial g}{\partial x}(\cdot, c_2) \right\|_{C^0} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

quando  $\max\{\|\gamma\|_{C^0}, \|g\|_{C^{0,1}}\} \rightarrow 0$ .

Resta ver que a função  $(\gamma^*, g^*) \rightarrow \phi'(\gamma^*, g^*)$  é contínua. Seja  $(\gamma_n, g_n) \rightarrow (\gamma^*, g^*)$  então

$$\begin{aligned}\sup_{\max\{\|\gamma\|_{C^0}, \|g\|_{C^{0,1}}\} \leq 1} \|\phi'(\gamma_n, g_n)(\gamma, g) - \phi'(\gamma^*, g^*)(\gamma, g)\|_{C^0} \\ \leq \left\| \frac{\partial g_n}{\partial x}(\cdot, \gamma_n) - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*) \right\|_{C^0} + \|\gamma_n - \gamma^*\|_{C^0} \\ \leq \left\| \frac{\partial g_n}{\partial x}(\cdot, \gamma_n) - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma_n) \right\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma_n) - \frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma^*) \right\|_{C^0} + \|\gamma_n - \gamma^*\|_{C^0} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . c.q.d.



**Proposição 4.3.6.** *A função*

$$\Pi : \mathbb{R}^2 \times X \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$$

$$(z, h, g) \rightarrow x(\cdot; a, z, h, g)$$

*é de classe  $C^1$ .*

**Dem.** Fixemos  $z^* = (z_1^*, z_2^*) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(h^*, g^*) \in X$  e  $\gamma^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*)$  a solução de (4.8) tal que  $\gamma^*(a) = z^*$ . Consideremos o subespaço  $C_0^1([a, b], \mathbb{R}^2)$  das funções em  $C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$  tal que  $f(a) = 0$ . Pelo último lema, a função

$$\Gamma : \mathbb{R}^2 \times C_0^1([a, b], \mathbb{R}^2) \times X \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$$

$$(z_1, z_2, \gamma, h, g) \rightarrow (\gamma_1', \gamma_2') - (z_2 + \gamma_2 - H(z_1 + \gamma_1), -g(\cdot, z_1 + \gamma_1))$$

onde  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ , é de classe  $C^1$ . Temos  $\Gamma(z^*, \gamma^* - z^*, h^*, g^*) = 0$ . Por outro lado, de novo pelo lema anterior,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma}(z^*, \gamma^* - z^*, h^*, g^*) : C_0^1([a, b], \mathbb{R}^2) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$$

$$\gamma \rightarrow \gamma' - \left( \gamma_2 - h^*(\gamma_1^*)\gamma_1, -\frac{\partial g^*}{\partial x}(\cdot, \gamma_1^*)\gamma_1 \right).$$

Esta função é um isomorfismo. De facto, dada  $y = (y_1, y_2) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma}(z^*, \gamma^* - z^*, h^*, g^*)(\gamma) = y$$

sse  $\gamma$  é solução da equação linear

$$\begin{cases} \gamma_1' = \gamma_2 - h^*(\gamma_1^*)\gamma_1 + y_1(t) \\ \gamma_2' = -\frac{\partial g^*}{\partial x}(t, \gamma_1^*)\gamma_1 + y_2(t) \end{cases}$$

em  $[a, b]$  e verifica  $\gamma(a) = 0$ . Podemos então aplicar o teorema das funções implícitas (ver [Ze], pág.250) e concluir que existem números  $\rho > 0$  e  $r > 0$  tal que se

$$\|z - z^*\| < \rho, \quad \|(h, g) - (h^*, g^*)\|_X < \rho \quad (4.9)$$

então a equação

$$\Gamma(z, \gamma, h, g) = 0$$

tem uma única solução  $\gamma \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^2)$  com  $\|\gamma - \gamma^* + z^*\|_{C^0} < r$ . Além disso, se  $V$  for a função definida numa vizinhança de  $(z^*, h^*, g^*)$  determinada por (4.9) que a cada  $(z, h, g)$  corresponde  $\gamma$ , então  $V$  é de classe  $C^1$ . Observemos finalmente que nesta vizinhança temos  $\Pi(z, h, g) = V(z, h, g) + z$ . c.q.d.



# Conclusão e trabalho futuro

Dados os resultados obtidos nesta tese algumas perguntas surgem naturalmente. Por exemplo, uma questão que fica em aberto é a de saber qual é o valor óptimo de  $c$  para o qual a equação do pêndulo periodicamente forçado

$$x'' + cx' + \sin x = p(t),$$

tem um atrator homeomorfo ao círculo. O Teorema 2.1.3 mostra que sempre que  $c > 2$  o atrator é homeomorfo ao círculo, pelo que este valor óptimo é necessariamente inferior a 2.

Tentámos caracterizar alguns sistemas que têm um atrator homeomorfo ao círculo. Esta é topologicamente a forma mais simples que o atrator de um sistema dissipativo no cilindro pode tomar. De facto, como vimos, se o atrator é homeomorfo ao círculo então a teoria dos homeomorfismos do círculo ajuda-nos a entender a dinâmica em  $\mathcal{A}$ . Por outro lado, o atrator  $\mathcal{A}$  tem necessariamente de ser algo que não é contráctil no cilindro, pelo que não se pode reduzir por exemplo a um ponto. Vimos na Secção 2.4 um exemplo de sistema onde  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo ao círculo e embora o sistema seja autónomo, o atrator já apresenta alguma complexidade, nomeadamente não é localmente conexo. Gostaríamos de poder entender algo da dinâmica destes sistemas quando a dissipação é mais fraca e tipicamente  $\mathcal{A}$  não é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$ . Alguns passos nesta direcção foram dados por exemplo em [WaYo] e [HoHo].

Quando mostramos que um destes atractores é homeomorfo a  $\mathbb{T}^1$  estamos de certa forma a provar um resultado de sincronização, também usualmente chamada “generalizing synchronization”. De facto, neste caso, qualquer órbita se aproxima assintoticamente de uma variedade de dimensão 1, o que de certo modo é um tipo de sincronização. Alguns dos resultados de sincronização são baseados no facto de o fluxo do sistema se aproximar de uma variedade invariante (ver por exemplo [AfRo], [AfChHa], [LaRo]). Seria interessante ver até que ponto a condição geral de R. Smith (ver [Sm2]) pode ser usada, de uma forma semelhante ao que foi feito nesta tese, para mostrar a existência de variedades invariantes de dimensão igual ao número de valores próprios negativos de  $P$ .

Nos últimos anos o estudo de sistemas do tipo de (4.2) tem sido motivado pelo estudo de sistemas de juntas de Josephson. O estudo do caso não-autônomo é, tanto quanto sabemos, uma novidade. Seria interessante estudar as consequências práticas do Teorema 4.2.3 nestes problemas.

# Bibliografia

- [AbMaRa] R. ABRAHAM, J. MARSDEN, T. RATIU, *Manifolds, tensor analysis, and applications*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [AfRo] V. AFRAIMOVICH, H. RODRIGUES, *Uniform dissipativeness and synchronization on nonautonomous equations*, Papers from the conference EQUADIFF95, (editado por L. Magalhães et al.), World Scientific Publishing (1998), 3-15.
- [AfChHa] V. AFRAIMOVICH, S. SHOW, J. HALE, *Synchronization in lattices of coupled oscillators*, Physica D 103, (1997), 442-451.
- [AlCa] J. ALONSO, J. CAMPOS, *The index and the asymptotic stability of fixed points in two dimentions: A counterexample*, Nonlinear Analysis 32 (1998), 719-725.
- [ArPl] D. K. ARROWSMITH, C. M. PLACE, *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 1990.
- [Di] F. R. DIAS AGUDO, *Análise Real*, Escolar Editora, 1990.
- [Ha] J. HALE, *Dissipation and attractors*, Proccedings of the Int. Conf. on Differential Equations, EQUADIFF99, (editado por B. Fiedler, K. Gröger, J. Sprekels), World Scientific Publishing (2000), 622-637.
- [Har] P. HARTMAN, *Ordinary differential equations*, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [HiSm] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
- [HoHo] K. HOCKETT, P. HOLMES, *Josephson's junction, annulus maps, Birkhoff attractors, horseshoes and rotation sets*, Ergod. Th & Dynam. Sys. 8 (1985), 205-239.

- [HoLeMi] F. C. HOPPENSTEADT, M. LEVI, W. L. MIRANKER, *Dynamics of the Josephson junction*, Quart. Appl. Math. 36 (1978), 167-198.
- [HoJo] R. HORN, C. JOHNSON, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [Ja] V. A. JAKUBOVIČ, *Factorization of symmetric matrix polynomials*, Soviet Math. Dokl. 11 (1970), 1261-1264.
- [KaHa] A. KATOK, B. HASSELBLATT, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [KrPePoZa] M. A. KRASNOSEL'SKIY, A. I. PEROV, A. I. POVOLOTSKIY, P. P. ZABREIKO, *Plane vector fields*, Academic Press, 1966.
- [LaRo] I. LABOURIAU, H. RODRIGUES, *Synchronization of coupled equations of Hodgkin-Huxley type*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal. 10 (2003), 463-476.
- [LaTi] P. LANCASTER, M. TISMENETSKY, *The theory of matrices*, Academic Press, 1985.
- [La] P. LAX, *Linear algebra*, John Wiley & Sons, 1997.
- [Le] M. LEVI, *Nonchaotic behavior in the Josephson junction*, Physical Review A 37 (1988), 927-931.
- [Lev] N. LEVINSON, *Transformation theory of non-linear differential equations of the second order*, Ann. Math. 45 (1944), 723-737. Correction, 49 (1948) 738.
- [MaWi] W. MAGNUS, S. WINKLER, *Hill's equation*, Dover, 1979.
- [Ma1] R. MARTINS, *The effect of inversely unstable solutions on the attractor of the forced pendulum equation with friction*, a publicar em J. Differential Equations.
- [Ma2] R. MARTINS, *One-dimensional attractor for a dissipative system with a cylindrical phase space*, aceite para publicação em Discrete and Continuous Dynamical Systems.
- [Ma3] R. MARTINS, *The attractor of an equation of Tricomi's type*, preprint.
- [MiXiJi] Q. MIN, S. XIAN, Z. JINYAN, *Global behavior in the dynamical equation of J-J type*, J. Differential Equations 71 (1988), 315-333.

- [Or1] R. ORTEGA, *Some applications of the topological degree to stability theory*, in "Topological methods in differential equations and inclusions" (editado por A. Granas and M. Frigon), Kluwer Academic (1995), 377-409.
- [Or2] R. ORTEGA, *Stability and index of periodic solutions of an equation of Duffing type*, B.U.M.I. 3-B (1989), 533-546.
- [Or3] R. ORTEGA, *The first interval of stability of a periodic equation of duffing type*, Proc. of the American Mathematical Society 115 (1992), 1061-1067.
- [Or4] R. ORTEGA, *The stability of the equilibrium: a search for the right approximation*, Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology, (editado por J. López-Gómez, F. Ruiz del Portal), Elsevier (2004).
- [Pl] V. A. PLISS, *Nonlocal problems of the theory of oscillations*, Academic Press, 1966.
- [QiQiZh] M. QIAN, W. QIN, S. ZHU, *One-dimensional global attractor for discretization of the damped driven sine-Gordon equation*, Nonlinear Analysis 34 (1998), 941-951.
- [QiZhQi] M. QIAN, S. ZHU, W. QIN, *Dynamics in a chain of overdamped pendula driven by constant torques*, SIAM J. Appl. Math. 57 (1997), 294-305.
- [RiWi1] D. RICHESON, J. WISEMAN, *A fixed point theorem for bounded dynamical systems*, Illinois J. Math. 46 (2002), 491-495.
- [RiWi2] D. RICHESON, J. WISEMAN, *Bounded homeomorphisms of the open annulus*, New York J. Math. 9 (2003), 55-68.
- [Sa] L. A. SÁNCHEZ, *Convergence in a Chua's system with three equilibria*, Z. Angew. Math. Phys. 55 (2004), 183-200.
- [SaCo] G. SANSONE, R. CONTI, *Nonlinear differential equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [Sm1] R. A. SMITH, *Absolute stability of certain differential equations*, J. London Math. Soc. 7 (1973), 203-210.
- [Sm2] R. A. SMITH, *Massera's convergence theorem for periodic nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 120 (1986), 679-708.

- [Tr1] F. TRICOMI, *Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica*, Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1933), 1-20.
- [Tr2] F. TRICOMI, *Sur une équation différentielle de l'électrotechnique*, C. R. Acad. Sci. Paris 193 (1931), 635-636.
- [WaYo] Q. WANG, L. YOUNG, *From invariant curves to strange attractors*, Commun. Math. Phys. 225 (2002), 275-304.
- [Ze] E. ZEIDLER, *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.